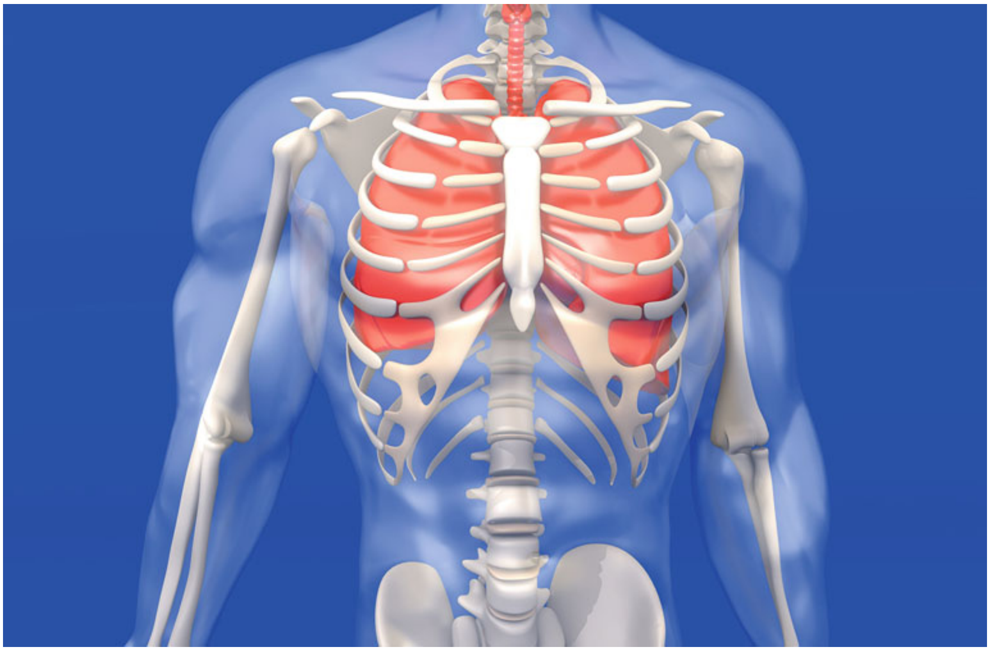
Matrizen und lineare Gleichungssysteme

12



Welche Kräfte müssen Brücken aushalten?

Wie können Legierungen gemischt werden?

Wie rechnet man mit Matrizen?

Wie hängen Gleichungssysteme mit Matrizen zusammen?

Teil III

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_12

Wir haben in Kap. 11 bereits gesehen, dass das Studium von Beziehungen von Vektoren in der Regel zu einem System von Gleichungen führt. Solche Systeme von linearen Gleichungen treten auch in vielen anderen Bereichen der Mathematik und der Naturwissenschaften auf. Daher werden wir in diesem Kapitel lineare Gleichungssysteme und ihre Eigenschaften studieren und mithilfe von Matrizen Wege zur Untersuchung ihrer Lösbarkeit und zum Finden ihrer Lösungsmengen herleiten.

12.1 Matrizen und Gleichungssysteme

Ein entscheidender Grund für die Beschäftigung mit Vektoren und Vektorräumen sind lineare Gleichungssysteme und damit zusammenhängende Fragen. In vielen praktischen Anwendungen hängen unterschiedliche Größen etwa eines physikalischen Systems in linearer Weise voneinander ab. In diesem Abschnitt wollen wir das Studium solcher Zusammenhänge formalisieren und vorantreiben.

Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme können über beliebigen Körpern betrachtet werden; von kleinen Ausflügen in die komplexen Zahlen abgesehen, werden wir uns jedoch auf die reellen Zahlen beschränken. Die prinzipiellen Techniken und Konstruktionen übertragen sich aber sofort auf die allgemeine Situation.

Teil III

Was sind lineare Gleichungssysteme?

Wie wir bereits gesehen haben, sind oft Beziehungen zwischen Vektoren zu betrachten. Bei der Untersuchung auf lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ etwa stehen wir vor dem Problem, alle Werte $r_1, \ldots, r_m$ zu finden, für die

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$$

gilt. Handelt es sich dabei um Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ und schreiben wir sie in Komponentenschreibweise, so erhalten wir daraus eine Gleichung für jede Komponente und damit insgesamt n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
r_1 v_{1,1} + \ldots + r_m v_{m,1} &= 0\\
r_1 v_{1,2} + \ldots + r_m v_{m,2} &= 0\\
\vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad &\vdots\\
r_1 v_{1,n} + \ldots + r_m v_{m,n} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Die Frage nach der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ ist also äquivalent zur Frage, ob dieses Gleichungssystem außer der trivialen Lösung $r_1 = \cdots = r_m = 0$ noch andere Lösungen hat.

Solche Problemstellungen treten in vielen Bereichen auf.

Beispiel

Ein starrer umströmter Körper K bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v entlang einer Wirklinie (z. B. in einem mit Wasser gefüllten Kanal). Dazu ist eine Strömungswiderstandskraft $\boldsymbol{F}_w$ von 60 N zu überwinden. Aus technischen Gründen können die zur Überwindung der Widerstandskraft erforderlichen Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ nur in einem Winkel von 60° und 30° zur Wirklinie angreifen (Abb. 12.1):

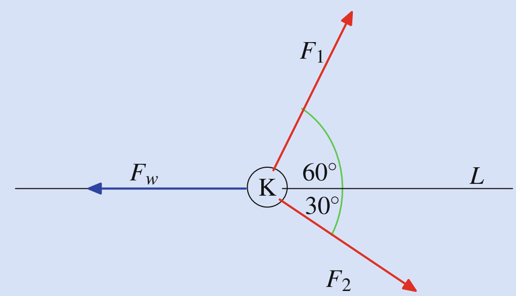


Abb. 12.1 Überwindung des Strömungswiderstands

Da es sich um einen starren Körper handelt, können wir annehmen, dass die Kräfte alle in einem Punkt, dem Masseschwerpunkt des Körpers angreifen (wie in der Anwendung „Schwerpunkte von endlich vielen Massen in der Starrkörpermechanik" in Abschn. 9.4 beschrieben). Ferner können wir Koordinaten so wählen, dass sich dieser Punkt augenblicklich im Punkt (0, 0) befindet und dass die Wirklinie L der Widerstandskraft die x-Achse ist, also $L = \{(r, 0) | r \in \mathbb{R}\}$. Dann ist

$$\boldsymbol{F}_w = \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_1 = x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 = y \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

wobei x und y die noch zu bestimmenden Stärken der angreifenden Kräfte sind.

Bedingung für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ist, dass insgesamt keine Kraft auf den Körper wirkt, dass also $\boldsymbol{F}_w + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ und damit

$$\begin{pmatrix} -60 + x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 + x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - y \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das wiederum bedeutet, dass wir eine Lösung des folgenden Gleichungssystems suchen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y &= 60\\
\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y &= 0
\end{aligned} \tag{12.1}$$

◀

Beispiel

Ein Röntgenbild zeigt ein zweidimensionales Schattenbild. In der Computertomografie wird aus vielen Röntgenbildern eine dreidimensionale Darstellung rekonstruiert. Die Kernerkenntnis ist dabei, dass ein Punkt auf einer Fotoplatte umso heller ist, je weniger der Röntgenstrahl auf seinem Weg von der Quelle zu dem Punkt geschwächt ist. Aus diesen Abschwächungsfunktionen wird das 3-D-Bild rekonstruiert. Dazu wird der betrachtete Raum in kleine Würfel (**Voxel**) unterteilt, auf denen die Abschwächung als konstant angenommen werden kann. Für jedes Voxel ergeben sich die Werte dann als Lösungen (sehr umfangreicher) Gleichungssysteme. ◀

Beispiel

Neusilber ist eine Legierung aus Kupfer, Nickel und Zink. Im Lager liegen drei Legierungen I-III mit den in folgender Tabelle angegebenen Zusammensetzungen:

	I	II	III
Kupfer	40 %	50 %	70 %
Nickel	30 %	20 %	10 %
Zink	30 %	30 %	20 %

Wie können diese Legierungen gemischt werden, um Neusilber mit einem Gehalt von 52 % Kupfer, 21 % Nickel und 27 % Zink herzustellen? Schreiben wir hier zunächst die Prozentanteile der vorhandenen Legierungen jeweils als Komponenten eines Vektors, also

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix},$$

und ebenso für die Ziellegierung

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 52 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix},$$

so suchen wir Zahlen a, b und c, die die Gleichung

$$a \cdot \boldsymbol{v}_1 + b \cdot \boldsymbol{v}_2 + c \cdot \boldsymbol{v}_3 = 100 \cdot \boldsymbol{z}$$

erfüllen (der Faktor 100 wird benötigt, da wir Angaben in Prozent errechnen wollen). Auch das führt zu einer Gleichung für jede einzelne Komponente und damit zu einem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c &= 5200 \\ 30a + 20b + 10c &= 2100 \\ 30a + 30b + 20c &= 2700 \end{aligned} \tag{12.2}$$

Man sieht diesen Gleichungen sicher nicht unmittelbar an, welche Lösungen sie haben (wenn sie überhaupt lösbar sind). ◀

Bei der Betrachtung linearer Gleichungssysteme ist es naheliegend, aus einer Gleichung Informationen über eine der Unbekannten zu ziehen und damit die anderen Gleichungen zu vereinfachen. Das wollen wir zunächst anhand des Gleichungssystems (12.1) untersuchen, das gegeben war als

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y &= 60 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y &= 0\,. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Durch Betrachtung der zweiten Gleichung erhalten wir

$$y = \sqrt{3} \cdot x\,.$$

Setzen wir das in die erste Gleichung ein, so wird diese zu

$$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x = 60\,,$$

also zu

$$2x = 60$$

mit der eindeutigen Lösung $x = 30$. Hieraus folgt wiederum

$$y = \sqrt{3} \cdot x = \sqrt{3} \cdot 30 \approx 52\,.$$

Damit erhalten wir, dass Kraft $\boldsymbol{F}_1$ eine Stärke von 30 N und $\boldsymbol{F}_2$ eine Stärke von $30 \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{N} \approx 52\,\mathrm{N}$ haben muss, um den Körper mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen.

Anstatt die zweite Gleichung nach x aufzulösen und dadurch die Variable y aus der ersten Gleichung zu eliminieren, hätten wir aber auch ein geeignetes Vielfaches der zweiten Gleichung (in diesem Fall das $\sqrt{3}$-fache, also $\frac{3}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y = \sqrt{3} \cdot 0$) zu beiden Seiten der ersten Gleichung addieren können. Das ergibt

$$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y + \left(\frac{3}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y \right) = 60 + 0\,,$$

nach Zusammenfassen also

$$2 \cdot x = 60\,,$$

sodass wir auch hier wieder $x = 30$ erhalten. Dieses Ergebnis können wir in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen, z. B. die erste, einsetzen und erhalten

$$15 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y = 60\,,$$

also

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 45 = 30 \cdot \sqrt{3}\,.$$

Diese beiden Ansätze liefern die gleichen Lösungen und sind daher gleichwertig.

Wir wollen nun das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c &= 5200 \\ 30a + 20b + 10c &= 2100 \\ 30a + 30b + 20c &= 2700 \end{aligned} \tag{12.4}$$

zur Gewinnung einer Neusilberlegierung mit der zweiten oben betrachteten Methode behandeln. Zunächst subtrahieren wir das $\frac{30}{40}$-fache der ersten Zeile von der zweiten und das $\frac{30}{40}$-fache der ersten Zeile von der dritten und erhalten

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c &= 5200 \\ -\frac{70}{4}b - \frac{170}{4}c &= -1800 \\ -\frac{30}{4}b - \frac{130}{4}c &= -1200\,. \end{aligned}$$

Dadurch haben wir die zweite und die dritte Zeile dahingehend vereinfacht, das wir in diesen Gleichungen nur noch zwei Variablen zu betrachten haben.

Wir fahren fort, indem wir denselben Ansatz auf das Gleichungssystem, das nur noch aus der zweiten und der dritten Gleichung besteht, anwenden. Dazu subtrahieren wir das $\frac{30}{70}$-fache der zweiten Gleichung von der dritten und erhalten

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c &= 5200 \\ -\frac{70}{4}b - \frac{170}{4}c &= -1800 \\ -\frac{100}{7}c &= -\frac{3000}{7}\,. \end{aligned}$$

Wir haben also die letzte Gleichung auf eine Unbekannte reduziert und das ganze Gleichungssystem auf eine Dreiecksform gebracht. Die letzte Gleichung ist eine lineare Gleichung in einer Unbekannten und hat die eindeutige Lösung $c = 30$. Setzen wir das in die vorletzte Gleichung ein, so erhalten wir

$$-\frac{70}{4} \cdot b - \frac{5100}{4} = -1800\,,$$

also wieder eine lineare Gleichung in einer Unbekannten mit der eindeutigen Lösung $b = 30$. Daraus erhalten wir für die erste Gleichung wieder eine lineare Gleichung in einer Unbekannten

$$40a + 1500 + 2100 = 5200\,,$$

und diese Gleichung hat die eindeutige Lösung $a = 40$.

Damit lässt sich das gesuchte Neusilber durch eine Mischung aus 40 % der Legierung I, 30 % der Legierung II und 30 % der Legierung III gewinnen.

Nicht immer führt dieser Weg zu einer eindeutigen Lösung. Nehmen wir etwa an, wir haben noch eine weitere Legierung IV, die aus 60 % Kupfer, 20 % Nickel und 20 % Zink besteht. Wollen wir aus diesen vier Legierungen das Neusilber zusammenmischen, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c + 60d &= 5200 \\ 30a + 20b + 10c + 20d &= 2100 \\ 30a + 30b + 20c + 20d &= 2700 \end{aligned} \tag{12.5}$$

Wie in der obigen Betrachtung subtrahieren wir das $\frac{30}{40}$-fache der ersten Zeile von und das $\frac{30}{40}$-fache der ersten Zeile von der dritten und erhalten

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c + 60d &= 5200 \\ -\frac{70}{4}b - \frac{170}{4}c - \frac{100}{4}d &= -1800 \\ -\frac{30}{4}b - \frac{130}{4}c - \frac{100}{4}d &= -1200\,. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir das $\frac{30}{70}$-fache der zweiten Gleichung von der dritten Gleichung, so ergibt das

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c + 60d &= 5200 \\ -\frac{70}{4}b - \frac{170}{4}c - \frac{100}{4}d &= -1800 \\ -\frac{100}{7}c - \frac{100}{7}d &= -\frac{3000}{7}\,. \end{aligned}$$

Weitere Vereinfachungen können nun nicht mehr durchgeführt werden, da keine weiteren Gleichungen mehr zur Verfügung stehen. Die einfachste Gleichung ist die dritte,

$$-\frac{100}{7} \cdot c - \frac{100}{7} \cdot d = -\frac{3000}{7}\,,$$

mit den zwei Unbekannten c und d. Eine davon können wir frei wählen, etwa d, und dann erhalten wir daraus $c = 30 - d$. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so wird diese zu

$$-\frac{70}{4} \cdot b + \frac{70}{4} \cdot d = -\frac{2100}{4}\,,$$

woraus wir $b = 30 + d$ erhalten. Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt das

$$40 \cdot a + 40 \cdot d = 1600\,,$$

also $a = 40 - d$. Damit erhalten wir viele Möglichkeiten, das gesuchte Neusilber zusammenzumischen, etwa aus 15 % der Legierung IV ($d = 15$), 15 % der Legierung III, 45 % der Legierung II und 25 % der Legierung I oder aber auch aus 30 % der Legierung III, 30 % der Legierung II und 40 % der Legierung I (also so wie im obigen Beispiel) unter Verzicht auf die zusätzliche Legierung IV.

Der Gauß-Algorithmus ermittelt die Lösungen linearer Gleichungssysteme

Die Ansätze aus den obigen Beispielen lassen sich zu einem allgemeinen Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme ausbauen. Allerdings muss dafür noch ein weiterer Fall behandelt werden. Dazu betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2y + 6z &= 8 \\ 2x + 2y + 4z &= 4\,. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Dieses System fügt sich nicht in unser Schema aus den Gln. (12.4) oder (12.1) ein, da es nicht möglich ist, durch Addition eines geeigneten Vielfachen der ersten Gleichung die erste Unbekannte aus der zweiten Gleichung zu eliminieren. Um einen allgemeingültigen und computertauglichen Algorithmus zu erhalten, ist dies aber erforderlich. Deshalb schieben wir einen Zwischenschritt ein und vertauschen zunächst die beiden Zeilen

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 4 \\ 2y + 6z &= 8\,. \end{aligned}$$

Nun haben wir schon, was wir wünschen. Um uns das Leben noch einfacher zu machen, normieren wir die Gleichungen dahingehend, dass wir jede Gleichung durch den Koeffizienten der ersten auftretenden Variable teilen, und bekommen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ y + 3z &= 4\,, \end{aligned}$$

aus dem wir sofort ablesen, dass seine allgemeine Lösung von der Form

$$z = r, \quad y = 4 - 3r, \quad x = 5r - 6$$

mit einem freien Parameter r ist.

Wir haben drei Zeilenumformungen kennengelernt, die wir an Gleichungssystemen durchführen können:

1. Subtrahiere das Vielfache einer Gleichung von einer anderen Gleichung.
2. Vertausche zwei Gleichungen.
3. Multipliziere eine Gleichung mit einer Zahl $r \neq 0$.

In speziellen Situation kann auch folgende Spaltenumformung nützlich sein:

4. Vertausche zwei Variablen.

Diese Operationen führen zu einem äquivalenten Gleichungssystem, also zu einem Gleichungssystem, das die gleichen Lösungen hat wie das ursprüngliche. Diese Operationen reichen auch aus, um jedes Gleichungssystem auf eine Form zu bringen, in der

- sofort entschieden werden kann, ob das Gleichungssystem lösbar ist;
- im Fall der Lösbarkeit alle Lösungen leicht angegeben werden können.

Dazu betrachten wir ein allgemeines System linearer Gleichungen, bestehend aus m Gleichungen mit n Unbekannten. Dafür benutzen wir folgende Notation:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 + & a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + & a_{2,2}x_2 & + \cdots + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + & a_{m,2}x_2 & + \cdots + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \tag{12.7}$$

Dabei stehen $x_1, \ldots, x_n$ für die zu bestimmenden Unbekannten, $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n}$ sind die Koeffizienten des Gleichungssystems, und $b_1, \ldots, b_m$ bezeichnen die Ergebnisse, die erreicht werden sollen. Im Gleichungssystem (12.1) etwa war $x_1 = x, x_2 = y$, $a_{1,1} = \frac{1}{2}, a_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{2,1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $a_{2,2} = -\frac{1}{2}$ sowie $b_1 = 60$ und $b_2 = 0$.

Definition

Gleichungssystem (12.7) heißt **homogen**, wenn $b_i = 0$ für alle i.

Jedes homogene Gleichungssystem mit n Unbekannten hat mindestens eine Lösung, nämlich

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0\,.$$

Diese Lösung heißt auch **triviale Lösung** des homogenen Gleichungssystems.

Definition

Ein Gleichungssystem (12.7) liegt in **(gaußscher) Normalform** oder in **Zeilenstufenform** vor, wenn es ein $t \in \{1, \ldots, m\}$ gibt mit

- $a_{i,j} = 0$ für alle $i > t$ und alle j (ab Zeile $t+1$ treten also keine Unbekannten mehr auf),
- $a_{i,j} = 0$ für $i \in \{2, \ldots, t\}$ und $j < i$,
- $a_{i,i} = 1$ für $i = 1, \ldots, t$.

In diesem Fall heißt t der **Rang** des linearen Gleichungssystems.

Ein lineares Gleichungssystem in Normalform hat also die Gestalt

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &=& b_1 \\ x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &=& b_2 \\ \ddots \qquad & & \vdots \\ x_t + \cdots + a_{t,n}x_n &=& b_t \\ 0 &=& b_{t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 &=& b_m\,. \end{array} \tag{12.8}$$

In dieser allgemeinen Form sieht die Normalform sehr unübersichtlich aus. Die Situation wird aber einfacher, wenn wir einige Beispiele betrachten.

Das Gleichungssystem (12.1) ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \sqrt{3} \cdot x_2 &= 120 \\ x_2 &= 30 \cdot \sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

in Normalform. Das Gleichungssystem (12.5) wurde schon auf die Gestalt

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c + 60d &= 5200 \\ -\frac{70}{4}b - \frac{170}{4}c - \frac{100}{4}d &= -1800 \\ -\frac{100}{7}c - \frac{100}{7}d &= -\frac{3000}{7} \end{aligned}$$

reduziert. Normalform erhalten wir daraus, in dem wir die erste Zeile durch 40 teilen, die zweite Zeile durch $-\frac{70}{4}$ und die dritte Zeile durch $-\frac{100}{7}$:

$$\begin{aligned} a + \frac{5}{4}b + \frac{7}{4}c + \frac{3}{2}d &= 130 \\ b + \frac{17}{7}c + \frac{10}{7}d &= \frac{720}{7} \\ c + d &= 30 \end{aligned}$$

Gleichungssysteme in Normalform lassen sich sehr einfach weiterverarbeiten: Liegt ein Gleichungssystem in Normalform vor, so ist klar, dass wir keine Lösung haben können, wenn $b_i \neq 0$ für ein $i > t$, etwa $b_{t+1} \neq 0$. Dann enthält das System eine Gleichung

$$0 = b_{t+1} ,$$

die durch keine Wahl der x_i erfüllt werden kann.

Ist $b_i = 0$ für $i > t$, so können wir für das Gleichungssystem wie in den Beispielen einfach Lösungen angeben, indem wir mit der letzten Gleichung starten. Falls auch noch $t = n$, so ergibt die letzte Gleichung $x_n = b_n$ für x_n den eindeutigen Lösungswert $x_n = b_n$, und durch sukzessives Einsetzen in die vorangehenden Gleichungen ergeben sich daraus eindeutige Belegungen für $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Falls dagegen $t < n$, so hat die letzte Gleichung die Gestalt

$$x_t + a_{t,t+1}x_{t+1} + \ldots + a_{t,n}x_n = b_t$$

mit $t \neq n$. Wir können also für $x_{t+1}, \ldots, x_n$ beliebige Werte einsetzen (z. B. können wir $x_{t+1} = \cdots = x_n = 0$ wählen) und erhalten daraus eine eindeutige Lösung für x_t. Durch sukzessives Einsetzen in die vorangehenden Gleichungen ergeben sich dann auch eindeutige Belegungen für $x_1, \ldots, x_{t-1}$. Damit haben wir in diesem Fall $n - t + 1$ Freiheitsgrade, also unendlich viele Lösungen. Diese Analyse der Normalform hat uns also einen Algorithmus geliefert, um Gleichungssysteme in Normalform zu lösen (falls sie lösbar sind).

Achtung Der Fall $t > n$ kann nach Definition der Normalform nicht auftreten. ◀

Lösbarkeit von Gleichungssystemen

Für ein Gleichungssystem in Normalform (12.8) gilt:

1. Genau dann ist es lösbar, wenn $b_i = 0$ für $i > t$.
2. Genau dann hat es eine eindeutige Lösung, wenn $b_i = 0$ für $i > t$ und $t = n$.
3. Genau dann hat es unendlich viele Lösungen, wenn $b_i = 0$ für $i > t$ und $t < n$.

Um ein lineares Gleichungssystem zu lösen, reicht es daher, einen Weg zu finden, es in ein äquivalentes Gleichungssystem in Normalform zu überführen. Dabei heißen zwei Gleichungssysteme äquivalent, wenn sie dieselben Lösungen haben.

Transformation auf Zeilenstufenform

Jedes beliebige Gleichungssystem kann durch die Zeilen- und Spaltenumformungen 1.–4. auf Normalform gebracht werden.

Die Normalform eines homogenen Gleichungssystems ist homogen.

Beweis Wir geben einen Algorithmus an, der ein beliebiges Gleichungssystem in die gewünschte Form bringt.

Gegeben ist ein allgemeines lineares Gleichungssystem (12.7).

Startschritt: Setze $\rho = 0$.

Verarbeitungsschritt: Setze $\rho = \rho + 1$.

Gibt es ein $i = \{\rho, \ldots, m\}, j \in \{\rho, \ldots, n\}$ mit $a_{i,j} \neq 0$?

- Nein: Stopp, das Gleichungssystem ist in Normalform, und sein Rang ist $\rho - 1$.
- Ja: Führe folgende Schritte durch:
  1. Falls $i > \rho$, wende Umformung 2. auf Gleichungen ρ und i an, d. h. vertausche Zeile ρ und Zeile i des Gleichungssystems; falls $j > \rho$, wende Umformung 4. auf die Variablen x_ρ und x_j an, d. h. vertausche die Variablen x_ρ und x_j im Gleichungssystem. Nach diesem Schritt erhalten wir ein äquivalentes Gleichungssystem mit $a_{\rho,\rho} \neq 0$.
  2. Wende Umformung 3. auf Zeile ρ an: Multipliziere Gleichung ρ mit $\frac{1}{a_{\rho,\rho}}$. Nach diesem Schritt haben wir ein äquivalentes Gleichungssystem mit $a_{\rho,\rho} = 1$.
  3. Für $i = \rho + 1, \ldots, m$ wende Umformung 1. auf die Gleichungen ρ und i mit Faktor $-a_{i,\rho}$ an, d. h. subtrahiere das $a_{i,\rho}$-fache der Zeile ρ von Zeile i. Nach diesem Verarbeitungsschritt erhalten wir ein äquivalentes Gleichungssystem mit $a_{i,\rho} = 0$ für alle $i \in \{\rho + 1, \ldots, m\}$.

Der Algorithmus endet nach höchstens $\min\{n, m\}$ Verarbeitungsschritten.

Ist das gegebene lineare Gleichungssystem homogen, so bleibt es nach jedem Verarbeitungsschritt homogen. Damit ist auch seine Zeilenstufenform homogen. ■

Um den Algorithmus wirklich zu verstehen, ist es am besten, ein Beispiel durchzuführen.

Beispiel

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 &= 10 . \end{aligned}$$

Wir starten mit $\rho = 0$.

1. $\rho = 1$: Es gibt $i \in \{1, 2, 3\}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$ mit $a_{i,j} \neq 0$, etwa $i = 2, j = 1$.

- Vertausche die ersten beiden Zeilen des Gleichungssystems und erhalte

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 6 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad &= 10\,. \end{aligned}$$

- Teile die erste Gleichung durch $a_{1,1} = 1$; das ändert das Gleichungssystem nicht.
- Subtrahiere das 0-fache der ersten Gleichung von der zweiten und das 2-fache der ersten Gleichung von der dritten und erhalte

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 6 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 4 \\ -x_2 - 2x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

2. $\rho = 2$: Es gibt $i \in \{2,3\}$ und $j \in \{2,3\}$ mit $a_{i,j} \neq 0$, etwa $i = 2, j = 2$.

- Vertauschungsoperationen sind nicht durchzuführen, da $i = \rho$ und $j = \rho$.
- Teile die zweite Gleichung durch 2 und erhalte

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -x_2 - 2x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

- Subtrahiere das (-1)-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile und erhalte

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ x_3 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

3. $\rho = 3$: Es gibt kein $i \in \{3\}$ und $j \in \{3\}$ mit $a_{i,j} \neq 0$.

Der Algorithmus ist beendet, und das Gleichungssystem ist in Normalform. Sein Rang ist 2, und es ist lösbar, da $b_i = 0$ für $i = 3$. Seine Lösung ist $x_3 = r, x_2 = 2 - 2r$ und $x_1 = 4 + r$ mit einem freien Parameter r. ◀

Achtung Die Normalform, die man am Ende des Algorithmus erhält, ist abhängig von der Auswahl des **Pivotelements**, also von der Auswahl von i, j mit $a_{i,j} \neq 0$, die in jedem Schritt getroffen wird.

Wir hätten in unserem Beispiel in Schritt 1 auch $i = 3, j = 1$ nehmen können (was zu einer Vertauschung der ersten mit der dritten Gleichung geführt hätte) und hätten dann als Normalform

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2} \cdot x_2 \qquad &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

erhalten. Die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems ist aber wieder $x_3 = r$, $x_2 = 2 - 2r$ und $x_1 = 4 + r$ mit einem freien Parameter r, genau wie oben.

Um einen Algorithmus mit reproduzierbarem Ablauf zu bekommen, ist es also noch erforderlich, eine Strategie zum Auffinden eines Pivotelements anzugeben. ◀

Achtung Aus mathematischer Sicht ist es irrelevant, welche $i, j \geq \rho$ mit $a_{i,j} \neq 0$ als Pivotelement gewählt werden, aus numerischer Sicht ist es aber wichtig, die i, j so zu wählen, dass $|a_{i,j}|$ möglichst maximal ist. Das führt zur Minimierung von Rundungsfehlern und Rechenungenauigkeiten. ◀

Das Vertauschen von zwei Gleichungen oder zwei Variablen x_i und x_j wird benötigt, wenn in einem Schritt ρ der Fall $a_{\rho,\rho} = 0$ auftritt. Gibt es in diesem Fall ein $i \in \{\rho, \ldots, m\}$ mit $a_{i,\rho} \neq 0$, so können wir die Zeilen i und ρ vertauschen und den Algorithmus (ohne Variablenvertauschung) fortsetzen. Gibt es kein solches i, so taucht in den Gleichungen $\rho, \ldots, m$ die Variable x_i nicht mehr auf. Da aber keine der Zeilen- und Spaltenumformungen 1.-4. eine neue Variable generiert, wird nach jedem Schritt eine der verbleibenden Variablen in den verbleibenden Gleichungen fehlen. Falls wir also von einem Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten ausgegangen sind, so können wir auf keinen Fall mehr eine Normalform vom Rang n erreichen, denn in ihr müsste auch die fehlende Variable als führende Variable in einer Zeile auftauchen. Das bedeutet:

Gleichungssysteme mit vollem Rang

Hat ein Gleichungssystem mit n Unbekannten den Rang n, so kann es nur mit den Zeilenumformungen 1.–3. auf Normalform gebracht werden.

Kommentar Für die Behandlung von Gleichungssystemen ist es nicht erforderlich, dass die Koeffizienten reelle Zahlen sind. Der Eliminationsalgorithmus lässt sich genauso über jedem anderen Körper durchführen. Für uns relevant sind dabei vor allem die komplexen Zahlen. Betrachten wir etwa die Beziehung

$$\begin{aligned} x_1 + \ \mathrm{i} \cdot x_2 &= 1 + \mathrm{i} \\ (1 + \mathrm{i}) \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 &= 1 + 3\mathrm{i}\,, \end{aligned} \tag{12.9}$$

so können wir hier die zum reellen Fall analogen Operationen durchführen: Durch Subtraktion des $(\mathrm{i} + 1)$-fachen der ersten Zeile von der zweiten erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad \mathrm{i} \cdot x_2 &= 1 + \mathrm{i} \\ -\ (1 + \mathrm{i}) \cdot x_2 &= 1 + \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Division der zweiten Zeile durch $-(1 + \mathrm{i})$ ergibt

$$\begin{aligned} x_1 + \ \mathrm{i} \cdot x_2 &= 1 + \mathrm{i} \\ x_2 &= -1\,, \end{aligned}$$

und durch Rückwärtsrechnen erhalten wir

$$x_2 = -1, \quad x_1 = 1 + 2\mathrm{i}\,.$$

Die Aussagen über die Lösbarkeit eines Gleichungssystems und die Anzahl der Lösungen gelten auch für Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten. ◀

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema

Die Vorgehensweise beim Gauß-Algorithmus ist in der Notation ein wenig kompliziert und umständlich, da wir immer die Variablen mitführen, obwohl diese für den Algorithmus keine Rolle spielen. Mit der Matrizenschreibweise werden wir nun einen Formalismus kennenlernen, der es erlaubt, lineare Gleichungssysteme und damit zusammenhängende Probleme effizienter zu behandeln.

Eine **Matrix** A vom Typ (m,n) oder eine $m \times n$-Matrix ist ein Schema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

bestehend aus m Zeilen und n Spalten von (reellen oder komplexen) Zahlen $a_{i,j}$.

$a_{i,j}$ heißt dabei das **Matrixelement** an der Stelle (i,j), i heißt **Zeilenindex** von $a_{i,j}$, und j heißt **Spaltenindex** von $a_{i,j}$.

Wir schreiben für eine Matrix kurz $A = \left(a_{i,j}\right)_{(m,n)}$ oder – falls m und n klar sind – $A = \left(a_{i,j}\right)$.

Zwei $m \times n$-Matrizen $A = \left(a_{i,j}\right)$ und $B = \left(b_{i,j}\right)$ heißen gleich, wenn

$$a_{i,j} = b_{i,j} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n\,.$$

Die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen bezeichnen wir als $\mathbb{R}^{m,n}$. Üblich sind auch die Bezeichnungen $\mathrm{Mat}(m,n)$ oder $\mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{R})$.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ist eine 2×4-Matrix mit den Einträgen

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 1\,, & a_{1,2} &= 2\,, & a_{1,3} &= 3\,, & a_{1,4} &= 4\,, \\ a_{2,1} &= 7\,, & a_{2,2} &= 6\,, & a_{2,3} &= 5\,, & a_{2,4} &= 4\,. \end{aligned}$$ ◀

Die $m \times n$-Matrix $A = \left(a_{i,j}\right)$ mit $a_{i,j} = 0$ für alle i,j heißt $m \times n$-**Nullmatrix**. Hierfür schreiben wir auch $0_{(m,n)}$ oder kurz 0.

Eine $m \times 1$-Matrix A ist ein Schema der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix},$$

entspricht also einem m-dimensionalen Spaltenvektor.

Eine $1 \times n$-Matrix B ist ein Schema der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \end{pmatrix},$$

entspricht also einem n-dimensionalen Zeilenvektor.

Damit sind Vektoren Spezialfälle von Matrizen.

Matrizen finden vielfältige Anwendungen in Technik und Wirtschaft. So werden sie etwa häufig zur Beschreibung von Produktionsprozessen und Warenflüssen eingesetzt. Hierzu betrachten wir eine Situation mit drei Grundstoffen G_1, G_2 und G_3, die benötigt werden, um drei Bauteile B_1, B_2 und B_3 zu fertigen, die wiederum in die Produktion von zwei Endprodukten F_1 und F_2 einfließen (Abb. 12.2).

Diese Grafik ist so zu lesen, dass z. B. Grundstoff G_1 für Bauteile B_1 und B_2 benötigt wird, nicht aber für B_3. Zur Bedarfsplanung werden noch die Mengen der Grundstoffe pro Bauteil (Tab. 12.1) bzw. die Anzahl der Bauteile pro Fertigprodukt (Tab. 12.2) benötigt.

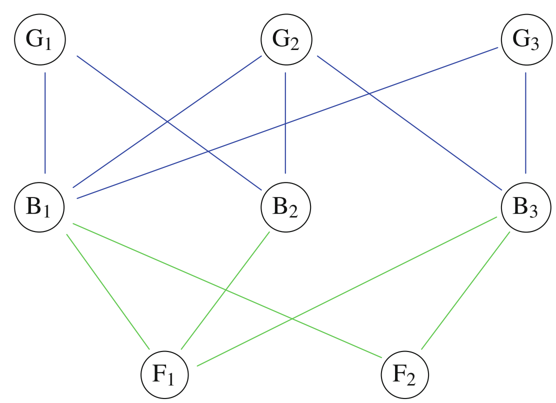


Abb. 12.2 Ein mehrstufiger Produktionsprozess

Tab. 12.1 Grundstoffmenge pro Bauteil

	B_1	B_2	B_3
G_1	4	3	0
G_2	2	4	1
G_3	2	0	2

Tab. 12.2 Bauteile pro Fertigprodukt

	F_1	F_2
B_1	7	4
B_2	3	5
B_3	4	4

Einfach und kompakt werden diese Werte häufig wie in (12.10) zu Matrizen GB und BF zusammengefasst , die sich besonders gut für die weitere Verarbeitung eignen.

$$\mathrm{GB} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{BF} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}. \tag{12.10}$$

Definition

Ist $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$-Matrix, so heißt

$$A_{i,\bullet} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

die **i-te Zeile** oder der **i-te Zeilenvektor** von A und

$$A_{\bullet,j} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

die **j-te Spalte** oder der **j-te Spaltenvektor** von A.

Wir benutzen auch die Notation $\boldsymbol{a}_{(i)}$ für die i-te Zeile von A und $\boldsymbol{a}^{(j)}$ für die j-te Spalte von A.

Eine $n \times n$-Matrix A heißt **quadratische Matrix** der Größe n oder quadratische $n \times n$-Matrix.

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ist eine quadratische Matrix (der Größe 2). ◄

Die quadratische $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } i = j\,, \\ 0\,, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

heißt $n \times n$-Einheitsmatrix. Hierfür schreiben wir E_n oder $\mathbf{1}_n$.

Die 2×2-Einheitsmatrix hat also folgende Gestalt:

$$\mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In quadratischen Matrizen gibt es neben den Zeilen und Spalten noch weitere ausgezeichnete Gruppen von Matrixelementen: Die Diagonale und die Gegendiagonale:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \diagdown & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \diagup & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Die Diagonale umfasst also die Elemente $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ und die Gegendiagonale die Elemente $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1}$.

Definition

- Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn alle Matrixelemente außerhalb der Diagonalen verschwinden, also wenn $a_{i,j} = 0$ für $i \neq j$.
- Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **(obere) Dreiecksmatrix**, wenn nur auf und oberhalb der Diagonalen von 0 verschiedene Elemente stehen, also wenn $a_{i,j} = 0$ für $i > j$.
- Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt **untere Dreiecksmatrix**, wenn nur auf und unterhalb der Diagonalen von 0 verschiedene Elemente stehen, also wenn $a_{i,j} = 0$ für $i < j$.

Beispiel

Die Matrizen

$$\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sind Diagonalmatrizen, die Matrizen

$$\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sind (obere) Dreiecksmatrizen. ◄

Ein lineares Gleichungssystems bestimmt eine Matrix

Jedes allgemeine lineare Gleichungssystem

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \tag{12.11}$$

Teil III

mit n Unbekannten und m Gleichungen führt durch Betrachtung der Koeffizienten zu einer $m \times n$-Matrix,

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

der **Koeffizientenmatrix** des Gleichungssystems, und einem m-dimensionalen Vektor (einer $m \times 1$-Matrix) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Ferner können wir auch die Unbekannten zu einem n-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ zusammenfassen.

Wir schreiben Gleichungssystem (12.11) dann kurz in der Form

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

eine Schreibweise, die durch die Matrizenmultiplikation (Abschn. 12.2) gerechtfertigt wird.

Beispiel

Im Fall des linearen Gleichungssystems (12.5),

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c + 60d &= 5200 \\ 30a + 20b + 10c + 20d &= 2100 \\ 30a + 30b + 20c + 20d &= 2700, \end{aligned}$$

zur Gewinnung von Neusilber (in dem wir die Unbekannten noch mit a, b, c und d bezeichnet haben) ergibt dies

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 50 & 70 & 60 \\ 30 & 20 & 10 & 20 \\ 30 & 30 & 20 & 20 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5200 \\ 2100 \\ 2700 \end{pmatrix}.$$ ◀

Umgekehrt definieren aber auch jede $m \times n$-Matrix

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

und jeder m-dimensionale Vektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ein lineares Gleichungssystem in n Unbekannten und mit m Gleichungen mit A als Koeffizientenmatrix via

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Symmetrieeigenschaften zeichnen Matrizen aus

Die **transponierte Matrix** zu einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ ist die $n \times m$-Matrix $A^\top = (a_{i,j}^\top)$ mit

$$a_{i,j}^\top = a_{j,i} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m.$$

Die Matrix $A^\top$ entsteht also aus A durch Vertauschung der Zeilen und Spalten: Die Zeilen von A werden die Spalten von $A^\top$, und die Spalten von A werden die Zeilen von $A^\top$.

Beispiel

Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ist

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$ ◀

Beispiel

Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ist

$$A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Transponierte einer quadratischen Matrix ist also wieder eine quadratische Matrix der gleichen Größe. ◀

Definition

- Eine quadratische $n \times n$-Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^\top$.
- Sie heißt **schiefsymmetrisch**, wenn $A = -A^\top$.

Eine quadratische Matrix ist also symmetrisch, wenn

$$a_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } i,j = 1,\ldots,n$$

gilt, und schiefsymmetrisch, wenn

$$a_{i,j} = -a_{j,i} \qquad \text{für alle } i,j = 1,\ldots,n$$

gilt. Insbesondere gilt bei einer schiefsymmetrischen Matrix

$$a_{i,i} = -a_{i,i} \qquad \text{für alle } i = 1,\ldots,n,$$

und das ist nur möglich, wenn $a_{i,i} = 0$ für alle $i = 1,\ldots,n$.

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch, die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ist schiefsymmetrisch. ◀

Der Gauß-Algorithmus kann mit Matrizen beschrieben werden

Mithilfe der Matrizenschreibweise lässt sich nun der gaußsche Eliminationsalgorithmus zum Lösen linearer Gleichungssystem einfacher hinschreiben: Wie wir gesehen haben, liefert jedes lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = b_m \end{array}$$

eine $m \times n$-Matrix $A = \left(a_{i,j}\right)$ und einen Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$. Daraus bilden wir die erweiterte oder **augmentierte Matrix**

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right).$$

Die augmentierte Matrix $(A \mid \boldsymbol{b})$ ist also eine $m \times (n+1)$-Matrix, die aus A dadurch entsteht, dass wir eine Spalte, bestehend aus den Elementen von $\boldsymbol{b}$, anfügen.

Definition

Die augmentierte Matrix $(A \mid \boldsymbol{b})$ liegt in **(gaußscher) Normalform** oder in **Zeilenstufenform** vor, wenn es ein $t \in \{1,\ldots,m\}$ gibt mit

- $a_{i,j} = 0$ für alle $i > t$ und alle j,
- $a_{i,j} = 0$ für $i \in \{2,\ldots,t\}$ und $j < i$,
- $a_{i,i} = 1$ für $i = 1,\ldots,t$.

Eine augmentierte Matrix in Normalform hat also die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,t} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,t} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & a_{t,n} & b_t \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b_{t+1} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b_m \end{array}\right),$$

und zu einer augmentierten Matrix in Normalform gehört ein lineares Gleichungssystem in Normalform, nämlich

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{1,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ x_2 + \quad \cdots \quad + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \ddots \qquad\quad \vdots & & \vdots \\ x_t + \cdots + a_{t,n}x_n & = & b_t \\ 0 & = & b_{t+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b_m. \end{array}$$

Ähnlich wie für Gleichungssysteme gilt auch hier:

Transformation auf Normalform

Auf einer augmentierten Matrix $(A \mid \boldsymbol{b})$ betrachten wir die folgenden Zeilen- und Spaltenumformungen:

1. Subtrahiere das Vielfache einer Zeile von $(A \mid \boldsymbol{b})$ von einer anderen Zeile.
2. Vertausche zwei Zeilen von $(A \mid \boldsymbol{b})$.
3. Multipliziere eine Zeile von $(A \mid \boldsymbol{b})$ mit $r \neq 0$.
4. Vertausche zwei Spalten von $(A \mid \boldsymbol{b})$, von denen keine der Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$ sein darf.

Jede augmentierte Matrix $(A \mid \boldsymbol{b})$ lässt sich durch wiederholtes Anwenden der Umformungen 1.–4. auf Normalform bringen. Das zu dieser Normalform gehörige lineare Gleichungssystem ist eine Normalform des ursprünglichen linearen Gleichungssystems.

Teil III

Zur Erläuterung betrachten wir das Gleichunsssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4\,. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Hierzu gehört die augmentierte Matrix

$$C = (A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten, so erhalten wir

$$C_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Multiplizieren wir die zweite Zeile mit -1, so ergibt sich

$$C_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

also eine augmentierte Matrix in Normalform. Das zugehörige lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ & & x_2 & = & 2\,, \end{array}$$

also ein Gleichungssystem in Normalform mit Lösung

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2\,,$$

und das ist auch die Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems.

Beispiel

Wir betrachten wieder das lineare Gleichungssystem (12.5), also

$$\begin{aligned} 40a + 50b + 70c + 60d &= 5200 \\ 30a + 20b + 10c + 20d &= 2100 \\ 30a + 30b + 20c + 20d &= 2700\,. \end{aligned}$$

Hierzu gehört die augmentierte Matrix

$$C = (A\,|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 40 & 50 & 70 & 60 & 5200 \\ 30 & 20 & 10 & 20 & 2100 \\ 30 & 30 & 20 & 20 & 2700 \end{array}\right).$$

Multiplikation der ersten Zeile mit $\frac{1}{40}$ führt zu

$$C_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{6}{4} & 130 \\ 30 & 20 & 10 & 20 & 2100 \\ 30 & 30 & 20 & 20 & 2700 \end{array}\right).$$

Durch Subtraktion des 30-fachen der ersten Zeile von der zweiten und der dritten Zeile erhalten wir

$$C_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{6}{4} & 130 \\ 0 & -\frac{70}{4} & -\frac{170}{4} & -\frac{100}{4} & -1800 \\ 0 & -\frac{30}{4} & -\frac{130}{4} & -\frac{100}{4} & -1200 \end{array}\right).$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit $-\frac{4}{70}$ ergibt

$$C_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{6}{4} & 130 \\ 0 & 1 & \frac{17}{7} & \frac{10}{7} & \frac{720}{7} \\ 0 & -\frac{30}{4} & -\frac{130}{4} & -\frac{100}{4} & -1200 \end{array}\right).$$

Addition des $\frac{30}{4}$-fachen der zweiten Zeile zur dritten Zeile ergibt

$$C_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{6}{4} & 130 \\ 0 & 1 & \frac{17}{7} & \frac{10}{7} & \frac{720}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{100}{7} & -\frac{100}{7} & -\frac{3000}{7} \end{array}\right).$$

Multiplikation der letzten Zeile mit $-\frac{7}{100}$ liefert

$$C_5 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{6}{4} & 130 \\ 0 & 1 & \frac{17}{7} & \frac{10}{7} & \frac{720}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 30 \end{array}\right),$$

also eine Matrix in Normalform. In diesem Fall haben wir weder Zeilen- noch Spaltenvertauschungen benötigt. Das zugehörige Gleichungssystem (jetzt mit den Standardvariablen $x_1, \ldots, x_4$ geschrieben) ist

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{5}{4}\cdot x_2 + \tfrac{7}{4}\cdot x_3 + \tfrac{6}{4}\cdot x_4 &= 130 \\ x_2 + \tfrac{17}{7}\cdot x_3 + \tfrac{10}{7}\cdot x_4 &= \tfrac{720}{7} \\ x_3 + \phantom{\tfrac{10}{7}\cdot{}} x_4 &= 30\,. \end{aligned}$$

Als Lösungen erhalten wir natürlich wieder diejenigen, die wir ursprünglich gefunden haben: Wir können x_4 beliebig wählen, $x_4 = r$, und erhalten daraus durch Rückwärtsrechnen

$$x_4 = r, \quad x_3 = 30 - r, \quad x_2 = 30 + r, \quad x_1 = 40 - r\,. \quad ◄$$

Achtung Die Normalform einer augmentierten Matrix ist nicht eindeutig, genauso wie die Normalform eines Gleichungssystems nicht eindeutig war, und nicht alle Normalformen sind gleich einfach zu behandeln. Wir können aber immer eine Nor-

Teil III

malform $(A \mid \boldsymbol{b})$ erreichen, die die Gestalt

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,t+1} & \dots & a_{1,n} & & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,t+1} & \dots & a_{2,n} & & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{t,t+1} & \dots & a_{t,n} & & b_t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & b_{t+1} \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & b_m \end{array}\right)$$

hat. Dazu müssen wir lediglich, nach Erreichen einer Normalform, ein geeignetes Vielfaches der zweiten Zeile von der ersten Zeile abziehen, dann geeignete Vielfache der dritten Zeile von der ersten und der zweiten usw.

Diese Art der Normalform hat den Vorteil, dass sich die Lösungen des zugehörigen Gleichungssystems (falls sie existieren) und damit auch (bis auf Vertauschungen) die Lösungen des Ausgangssystems sofort aus der augmentierten Matrix ablesen lassen: Ist $x_{t+1} = \lambda_{t+1}, \dots, x_n = \lambda_n$ die Belegung der freien Variablen mit Parametern, so berechnet sich die komplette Lösung als

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1,t+1}\lambda_{t+1} - \dots - a_{1,n}\lambda_n \\ x_2 &= b_2 - a_{2,t+1}\lambda_{t+1} - \dots - a_{2,n}\lambda_n \\ &\vdots \\ x_t &= b_t - a_{t,t+1}\lambda_{t+1} - \dots - a_{t,n}\lambda_n \,. \end{aligned}$$

Ist speziell auch noch $t = m = n$, so erhält man direkt die (eindeutige) Lösung als

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad \dots \quad , \quad x_m = b_m \,.$$

Diese Art der Normalform nennen wir **reduzierte Zeilenstufenform** der augmentierten Matrix $(A \mid \boldsymbol{b})$. ◀

Beispiel

Wir betrachten nochmals das Gleichungssystem (12.12), also

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \,. \end{aligned}$$

Hierfür haben wir schon die Normalform

$$(A'' \mid \boldsymbol{b}'') = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

erhalten. Indem wir jetzt noch das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten Zeile subtrahieren, erhalten wir

$$(A''' \mid \boldsymbol{b}''') = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

und lesen daraus sofort die eindeutige Lösung $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ ab. ◀

Beispiel

Greifen wir nochmals das Gleichungssystem (12.5) auf, so haben wir bereits die Normalform

$$C_5 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{6}{4} & 130 \\ 0 & 1 & \frac{17}{7} & \frac{10}{7} & \frac{720}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

erreicht. Subtraktion des $\frac{5}{4}$-fachen der zweiten Zeile von der ersten ergibt

$$C_6 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{17}{7} & \frac{10}{7} & \frac{720}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 30 \end{array}\right),$$

und Subtraktion des $\frac{17}{7}$-fachen der dritten Zeile von der zweiten sowie Addition des $\frac{9}{7}$-fachen der dritten Zeile zur ersten führt zur reduzierten Zeilenstufenform

$$C_6 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

mit dem zugehörigen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 40 \\ x_2 \qquad - x_4 &= 30 \\ x_3 + x_4 &= 30 \,. \end{aligned}$$

Diesem Gleichungssystem sehen wir sofort an, dass wir x_4 frei wählen und die Gleichungen dann unmittelbar nach den anderen Variablen x_1, x_2 und x_3 auflösen können. ◀

Die Methode mit den augmentierten Matrizen eignet sich auch ausgezeichnet, um mehrere Gleichungssysteme (mit denselben Koeffizienten) simultan zu lösen. Betrachten wir etwa

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \qquad A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \,, \tag{12.13}$$

so können wir daraus die (erweiterte) augmentierte Matrix $(A \mid \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2)$ bilden und diese mit Zeilen- und Spaltenumformungen auf Normalform bringen. Ist dann $\left(A' \mid \boldsymbol{b}_1'\ \boldsymbol{b}_2'\right)$ eine Normalform dieser erweiterten augmentierten Matrix, so sind $\left(A' \mid \boldsymbol{b}_1'\right)$ und $\left(A' \mid \boldsymbol{b}_2'\right)$ Normalformen der jeweiligen einfachen augmentierten Matrizen.

Wie bei linearen Gleichungssystemen können auch bei Matrizen komplexe Koeffizienten auftreten. Betrachten wir wieder das Gleichungssystem (12.9), so erhalten wir die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}$$

und die augmentierte Matrix

$$(A \,|\, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -2 & 1+3\mathrm{i} \end{array}\right). \qquad (12.14)$$

Alle Operationen, die wir mit reellen Matrizen durchgeführt haben, lassen sich auch auf komplexe Matrizen ausdehnen, und komplexe Gleichungssysteme lassen sich mithilfe der augmentierten Matrix lösen. In dieser Situation etwa wird die augmentierte Matrix durch Subtraktion des $(1 + \mathrm{i})$-fachen der ersten Zeile von der zweiten zu

$$(A_1 \mid \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & -1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{array}\right).$$

Division der zweiten Zeile durch $-1 - \mathrm{i}$ liefert

$$(A_2 \mid \boldsymbol{b}_2) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

mit zugehörigem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \mathrm{i} \cdot x_2 &= 1 + \mathrm{i} \\ x_2 &= -1\,, \end{aligned}$$

woraus wir die Lösung $x_2 = -1$ und $x_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ erhalten.

12.2 Matrizenoperationen

Wichtig wird es für uns sein, mit Matrizen zu arbeiten und zu rechnen, ähnlich wie wir das schon mit Vektoren können. Bei der Definition der Rechenoperationen gehen wir auch so vor wie bei den Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Matrizen können addiert und mit Zahlen multipliziert werden

Für Matrizen $A = (a_{i,j})\,, B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ definieren wir die Matrizenaddition von A und B durch

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{i,j} + b_{i,j}) \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix $A + B$ ist also wieder eine $m \times n$-Matrix, die in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte den Eintrag $a_{i,j} + b_{i,j}$ hat.

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar, so definieren wir die Multiplikation einer Matrix mit λ durch

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{i,j}) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{1,1} & \lambda \cdot a_{1,2} & \dots & \lambda \cdot a_{1,n} \\ \lambda \cdot a_{2,1} & \lambda \cdot a_{2,2} & \dots & \lambda \cdot a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m,1} & \lambda \cdot a_{m,2} & \dots & \lambda \cdot a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\lambda \cdot A$ ist also wieder eine $m \times n$-Matrix, die in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte den Eintrag $\lambda \cdot a_{i,j}$ hat.

Durch $A - B = A + (-1) \cdot B$ definieren wir die Subtraktion von A und B und durch $-A = (-1) \cdot A$ das Negative einer Matrix.

Beispiel

Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+3 & 4+2 \\ 5+1 & 6+4 & 5+1 & 4+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 & 3-3 & 4-2 \\ 5-1 & 6-4 & 5-1 & 4-5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◄

Beispiel

Für

$$\lambda = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} \lambda \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 18 & 15 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◄

Anwendung: Elektrische Netzwerke

Elektrische Ströme und Spannungen in einem Schaltkreis werden durch die beiden kirchhoffschen Regeln bestimmt:

1. **Knotenregel**: In einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerkes ist die Summe der Stärken der zufließenden Teilströme gleich der Summe der Stärken der abfließenden Teilströme.
2. **Maschenregel**: In einer Masche ist die Summe der Spannungsabfälle gleich Null.

Bei der Maschenregel sind dabei Vorzeichen zu beachten. Wird also die Stromflussrichtung in einem Netzwerk von + nach − festgelegt, so werden in einer Masche Spannungsabfälle in Flussrichtung positiv und entgegen der Flussrichtung negativ gezählt.

Die Beziehung zwischen Stromstärke I und Spannung U an einem Widerstand R wird gegeben durch das **ohmsche Gesetz**

$$U = I \cdot R\,.$$

Die einfachsten Netzwerke sind Reihen- bzw. Parallelschaltungen von zwei Widerständen. Im Fall der Reihenschaltung (Abb. 12.3) liegt eine Masche vor, bei der die angelegte Spannung U_{ges} ein negatives Vorzeichen und die Spannungen U_1 und U_2, die an R_1 und R_2 abfallen, ein positives Vorzeichen haben (wobei wir annehmen, dass der kleine (rote) Pfeil die Durchlaufrichtung der Masche festlegt).

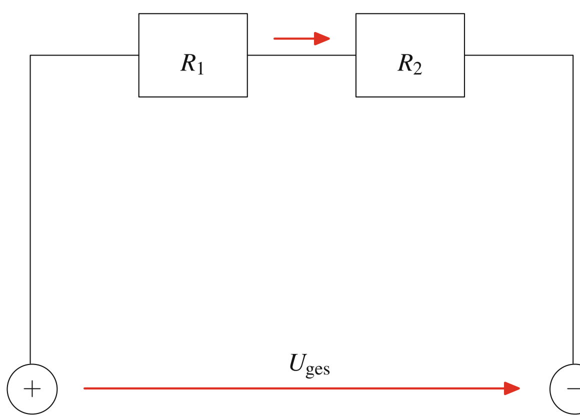


Abb. 12.3 Reihenschaltung von zwei Widerständen

Also besagt die Maschenregel

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2\,.$$

Da hier überall die gleiche Stromstärke fließt, bedeutet das nach dem ohmschen Gesetz

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$

und damit

$$U_1 = \frac{U_{\text{ges}}}{R_1 + R_2} \cdot R_1, \quad U_2 = \frac{U_{\text{ges}}}{R_1 + R_2} \cdot R_2\,.$$

Im Fall einer Parallelschaltung (Abb. 12.4) muss zunächst für die Spannungen U_1 und U_2, die an R_1 und R_2 abfallen, aufgrund der Maschenregel $U_1 = U_2\ (= U_{\text{ges}})$ gelten.

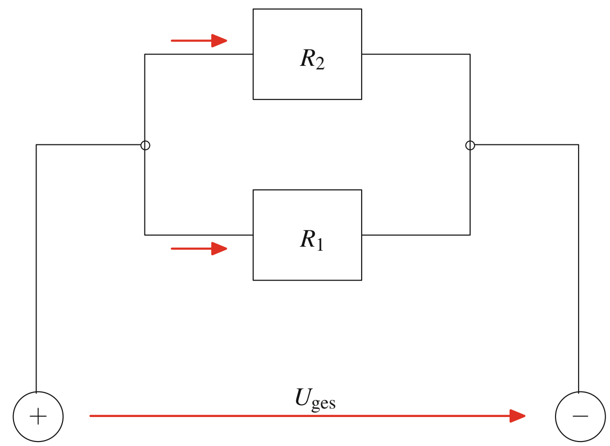


Abb. 12.4 Parallelschaltung von zwei Widerständen

Bezeichnen I_1 und I_2 in dieser Situation die Stromstärken, die durch R_1 und R_2 fließen, so gilt aufgrund der Knotenregel

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2\,,$$

also mit dem ohmschen Gesetz

$$\frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} = I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 = \frac{U_{\text{ges}}}{R_1} + \frac{U_{\text{ges}}}{R_2}\,.$$

Es folgt

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,,$$

und damit berechnet sich der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung als

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

Aus diesen Grundbausteinen lassen sich nun beliebige Netzwerke mit beliebigen Kombinationen von Reihen- und Parallelschaltungen von Widerständen mithilfe linearer Gleichungssysteme berechnen.

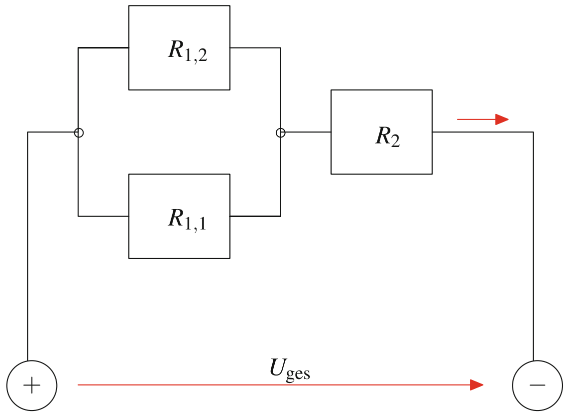


Abb. 12.5 Ein elektrisches Netzwerk

Betrachten wir dazu etwa eine Schaltung, wie sie durch Abb. 12.5 beschrieben wird, und bezeichnen wir mit $U_{1,1}, U_{1,2}$ und U_2 die Spannungen, die an $R_{1,1}, R_{1,2}$ und R_2 abfallen, und mit $I_{1,1}, I_{1,2}$ und I_2 die Stromstärken, die durch $R_{1,1}, R_{1,2}$ und R_2 fließen, so gilt, wie wir oben schon gesehen haben,

$$U_{1,1} = U_{1,2} =: U_1 \,,$$

und für den Widerstand R_1 der Parallelschaltung von $R_{1,1}$ und $R_{1,2}$ gilt

$$R_1 = \frac{R_{1,1} \cdot R_{1,2}}{R_{1,1} + R_{1,2}} \,.$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt ferner

$$U_1 = R_{1,1} \cdot I_{1,1} + R_{1,2} \cdot I_{1,2}$$

und damit erhalten wir nach der Maschen- und der Knotenregel für die Stromstärken in diesem Netzwerk das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & I_{1,2} & + & I_{2,2} & - & I_2 = 0 \\ R_{1,1} \cdot I_{1,1} & - & R_{1,2} \cdot I_{2,2} & & & & = 0 \\ & & & & R_{1,2} \cdot I_{2,2} & + & R_2 \cdot I_2 = U_{\text{ges}} \,. \end{array}$$

Die augmentierte Matrix dieses Gleichungssystems ist daher

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ R_{1,1} & -R_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1,2} & R_2 & U_{\text{ges}} \end{array}\right) .$$

Bringen wir diese augmentierte Matrix auf Normalform, so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{R_{1,1}}{R_{1,2}+R_{1,1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_{1,1}+R_{1,2}}{R_{1,1} \cdot R_{1,2}+R_{1,1} \cdot R_2+R_{1,2} \cdot R_2} \end{array}\right) .$$

Damit berechnen sich die einzelnen Stromstärken aus der angelegten Spannung U_{ges} gemäß

$$I_2 = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_{1,1} + R_{1,2}}{R_{1,1} \cdot R_{1,2} + R_{1,1} \cdot R_2 + R_{1,2} \cdot R_2}$$

$$I_{1,2} = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_{1,1}}{R_{1,1} \cdot R_{1,2} + R_{1,1} \cdot R_2 + R_{1,2} \cdot R_2}$$

$$I_{1,1} = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_{1,2}}{R_{1,1} \cdot R_{1,2} + R_{1,1} \cdot R_2 + R_{1,2} \cdot R_2} \,.$$

Regeln für das Rechnen mit Matrizen

Für $m \times n$-Matrizen A, B, C und Skalare r, s sind folgende Aussagen erfüllt:

1. Es gilt das Assoziativgesetz der Addition:
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
2. Es gilt das Kommutativgesetz der Addition:
$$A + B = B + A$$
3. Die Nullmatrix 0 ist neutrales Element der Addition:
$$A + 0 = A$$
4. Die Matrix $-A$ ist das inverse Element zu A bzgl. der Addition:
$$A + (-A) = 0_{(m,n)}$$
5. Es gilt das Assoziativgesetz für die Skalarmultiplikation:
$$(r \cdot s) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$$
6. Es gilt das erste Distributivgesetz:
$$r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$$
7. Es gilt das zweite Distributivgesetz:
$$(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$$
8. Die 1 ist neutrales Element der Skalarmultiplikation:
$$1 \cdot A = A$$

Anwendung: Stabwerke

Wir greifen das bereits in Abb. 9.21 dargestellte Stabwerk noch einmal auf (Abb. 12.6).

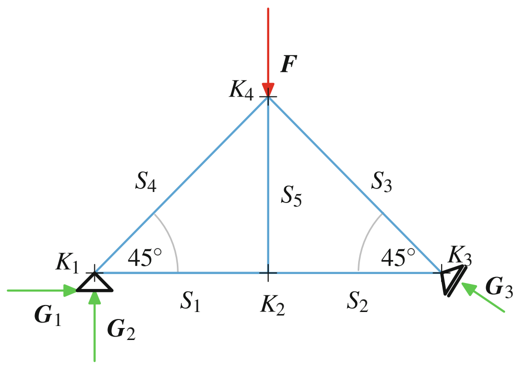


Abb. 12.6 Ein einfaches ebenes Stabwerk

Die Gleichgewichtsbedingung für dieses Stabwerk lautet

1. Die Gesamtkraft, die auf einen Knoten des Stabwerks wirkt, verschwindet.
2. Die Gesamtkraft, die in einem Stab des Stabwerks wirkt, verschwindet.

Die Lastkraft $\boldsymbol{F}$, die auf Knoten K_4 wirkt, hat in diesem Beispiel nur eine Komponente in y-Richtung und ist daher von der Form $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}$.

Wir wollen nun die Kräfte, die in den Stäben wirken und die Gegenkräfte, die in den Auflagern aufzubringen sind, aus der (bekannten) Kraft $\boldsymbol{F}$ ermitteln: Bezeichnen wir mit s_i die Stärke der Kraft, die durch Stab i (für $i = 1, \dots, 5$) übertragen wird (also den Betrag der entsprechenden Kraft) und mit g_j die Stärke der Kraft $\boldsymbol{G}_j$ ($j = 1, 2, 3$), und beachten wir, dass S_3 senkrecht auf S_1 und S_2 steht und dass S_3 und S_4 jeweils einen Winkel von 45° mit S_5 einschließen, so führen die Gleichgewichtsbedingungen in den vier Knoten zu den folgenden Beziehungen:

$$K_1\colon\ s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s_4}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + g_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2\colon\ s_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_3\colon\ s_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s_3}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{g_3}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_4\colon\ \frac{s_3}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{s_4}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}$$

Dabei haben wir aus den Winkeln und den Stärken der jeweiligen Kräfte ihre Polarkoordinatendarstellung ermittelt.

Diese vier Gleichgewichtsbeziehungen mit jeweils zwei Komponenten ergeben nun acht Gleichungen in acht Unbekannten. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen und der Darstellung der Gleichungen wollen wir dabei x_3 bzw. x_4 für $\frac{s_3}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{s_4}{\sqrt{2}}$ und x_8 für $\frac{g_3}{2}$ schreiben und erhalten dann für dieses Gleichungssystem die folgende augmentierte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -f
\end{array}\right)$$

mit reduzierter Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\sqrt{3}-1)\cdot f}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\sqrt{3}-1)\cdot f}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}\cdot f}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{f}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{f}{2}
\end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem der Gleichgewichtsbedingungen ist also für jede Lastkraft $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar. Wir erhalten (unter Berücksichtigung der Tatsache, dass wir $x_3 = \frac{s_3}{\sqrt{2}}$, $x_4 = \frac{s_4}{\sqrt{2}}$ und $x_8 = \frac{g_3}{2}$ gesetzt haben):

$$s_1 = \frac{(\sqrt{3}-1)\cdot f}{2}, \quad s_2 = \frac{(\sqrt{3}-1)\cdot f}{2}, \quad s_3 = \frac{f}{\sqrt{2}},$$
$$s_4 = \frac{f}{\sqrt{2}}, \qquad s_5 = 0$$

und

$$g_1 = \frac{\sqrt{3}\cdot f}{2}, \quad g_2 = \frac{f}{2}, \quad g_3 = f$$

und damit als Gegenkräfte, die in den Auflagern aufzubringen sind:

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\cdot f}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}\cdot f}{2} \\ \frac{f}{2} \end{pmatrix}$$

Mit $E_{l,k}$ bezeichnen wir die $m \times n$-Matrix $(a_{i,j})$ mit den Matrixelementen

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } i = l, j = k\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Beispiel

Für $m = 2, n = 2$ gilt

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ ◀

Sehr leicht rechnen wir nun nach

Matrizen bilden einen Vektorraum

Die Menge $\mathbb{R}^{m,n}$ der $m \times n$-Matrizen, zusammen mit der Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation von Matrizen, ist ein Vektorraum und die Matrizen $\{E_{l,k}\}_{\substack{l=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^{m,n}$. Insbesondere gilt also

$$\dim(\mathbb{R}^{m,n}) = m \cdot n$$

Matrizen lassen sich multiplizieren

Neben den Vektorraumoperationen gibt es noch eine weitere, sehr interessante Operation auf Matrizen: Für eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ und eine $n \times l$-Matrix $B = (b_{i,j})$ definieren wir das **Matrizenprodukt** $A \cdot B$ von A und B als diejenige $m \times l$-Matrix $C = (c_{i,j})$ mit

$$c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}\,.$$

Der entscheidende Punkt bei der Multiplikation von A mit B ist die Tatsache, dass die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmen muss.

Betrachten wir die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

so gilt hierfür

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Auch für die Matrixen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ist das Produkt $C \cdot D$ definiert, und es gilt

$$\begin{aligned} C \cdot D &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 11 & 14 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Achtung Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, es gilt also nicht $A \cdot B = B \cdot A$, auch wenn beide Produkte definiert sind. ◀

Als Beispiel berachten wir die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für diese gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für A und B können wir auch $B \cdot A$ bilden:

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist also $A \cdot B \neq B \cdot A$. Nicht einmal die Größen stimmen überein.

Bei quadratischen $n \times n$-Matrizen A und B sind zwar sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ wieder $n \times n$-Matrizen, aber auch in diesem Fall stimmen die beiden Produkte in der Regel nicht überein. Dazu betrachten wir wieder die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierfür haben wir oben schon gesehen, dass

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 18 & 7 \end{pmatrix},$$

wohingegen

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix},$$

sodass also auch in diesem Fall $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Fassen wir einen Vektor $\boldsymbol{v}$ als eine $n \times 1$-Matrix auf, so können wir eine $m \times n$-Matrix A mit $\boldsymbol{v}$ multiplizieren. Das Ergebnis $A \cdot \boldsymbol{v}$ ist eine $m \times 1$-Matrix, also ein m-dimensionaler Vektor.

Ist $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, so gilt:

$$A \cdot \mathbf{e}_j = A_{\bullet,j} \qquad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\} \tag{12.15}$$

ist der j-te Spaltenvektor von A. Das folgt sofort aus der Definition der Matrizenmultiplikation.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 \\ 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 4\cdot 1 + 5\cdot 0 \\ 3\cdot 0 + 4\cdot 0 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ist die dritte Spalte von A. ◄

Beispiel

In Abschn. 12.1 haben wir durch die Matrizen GB und BF (Formel (12.10)) einen mehrstufigen Produktionsprozess beschrieben. Diese Matrizen können konkret für die Planung eingesetzt werden. Sollen etwa zehn Fertigprodukte F_1 und zwölf Fertigprodukte F_2 produziert werden, so ergibt sich die Anzahl der benötigten Bauteile B_1, B_2 und B_3 gemäß Tab. 12.2 nach der Formel

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 10 + 4\cdot 12 \\ 3\cdot 10 + 5\cdot 12 \\ 4\cdot 10 + 4\cdot 12 \end{pmatrix} = \mathrm{BF} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 \\ 90 \\ 88 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend erhalten wir für die Menge der benötigten Grundstoffe

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \mathrm{GB} \cdot \begin{pmatrix} 118 \\ 90 \\ 88 \end{pmatrix} = \mathrm{GB} \cdot \mathrm{BF} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742 \\ 684 \\ 412 \end{pmatrix}.$$

Der gesamte Produktionsprozess wird daher durch die Produktmatrix

$$\mathrm{GF} = \mathrm{GB} \cdot \mathrm{BF} = \begin{pmatrix} 37 & 31 \\ 30 & 32 \\ 22 & 16 \end{pmatrix}$$

der Matrizen GB und BF beschrieben. ◄

Regeln für die Matrizenmultiplikation

1. Für eine $m \times n$-Matrix A, eine $n \times l$-Matrix B und eine $l \times k$-Matrix C gilt
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$
2. Für eine $m \times n$-Matrix A, eine $n \times l$-Matrix B und einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt
$$A \cdot (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B).$$
3. Für eine $m \times n$-Matrix A, eine $n \times l$-Matrix B und eine $n \times l$-Matrix C gilt
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$
4. Für eine $m \times n$-Matrix A, eine $m \times n$-Matrix B und eine $n \times l$-Matrix C gilt
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$
5. Für eine $m \times n$-Matrix A, eine $n \times l$-Matrix B gilt
$$(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top.$$
6. Für eine $m \times n$-Matrix A gilt
$$A \cdot \mathrm{E}_n = A = \mathrm{E}_m \cdot A.$$
wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix und E_m die $m \times m$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Schreiben wir einen Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$\boldsymbol{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n,$$

wobei $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, und ist $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$-Matrix mit den Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}^{(1)} = A_{\bullet,1}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(n)} = A_{\bullet,n}$, so gilt nach diesen Formeln

$$\begin{aligned} A \cdot \boldsymbol{v} &= A \cdot (v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n) \\ &= v_1 \cdot A \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \cdot A \cdot \mathbf{e}_n \\ &= v_1 \cdot \boldsymbol{a}^{(1)} + \cdots + v_n \cdot \boldsymbol{a}^{(n)}. \end{aligned}$$

Teil III

Eine interessante Beziehung erhalten wir zwischen Matrizenprodukt und Skalarprodukt:

Ist $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathbb{R}^{m,n}$, betrachten wir zwei Vektoren $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$, und schreiben wir $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$, so gilt

$$A \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} \cdot v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} \cdot v_i \end{pmatrix},$$

also

$$\langle A \cdot \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} \cdot v_i \cdot w_j .$$

Andererseits ist $A^\top = \left(a_{j,i}\right)$, also

$$A^\top \cdot \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{j,1} \cdot w_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{j,n} \cdot w_j \end{pmatrix}$$

und damit

$$\langle \boldsymbol{v},\, A^\top \cdot \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \cdot w_j \cdot v_i = \langle A \cdot \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle .$$

Wir haben daher folgende Wälzformel gezeigt:

Wälzformel

Ist A eine $m \times n$-Matrix und sind $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ zwei Vektoren , so gilt

$$\langle A \cdot \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\, A^\top \cdot \boldsymbol{w} \rangle . \qquad (12.16)$$

Ist speziell $m = n$ und A eine symmetrische Matrix, ist also $A^\top = A$, so gilt

$$\langle A \cdot \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\, A \cdot \boldsymbol{w} \rangle . \qquad (12.17)$$

Gl. (12.17) bestimmt sogar Symmetrie:

Symmetrie und Skalarprodukt

Genau dann ist eine $n \times n$-Matrix symmetrisch, wenn für alle n-dimensionalen Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ gilt:

$$\langle A \cdot \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\, A \cdot \boldsymbol{w} \rangle . \qquad (12.18)$$

Gilt nämlich $\langle A \cdot \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\, A \cdot \boldsymbol{w} \rangle$ für alle Vektoren, so gilt dies speziell auch für die Einheitsvektoren, also

$$\langle A \cdot \mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_i,\, A \cdot \mathbf{e}_j \rangle \qquad (12.19)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \langle A \cdot \mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j \rangle &= \langle \boldsymbol{a}^{(i)},\, \mathbf{e}_j \rangle &= a_{j,i} , \\ \langle \mathbf{e}_i,\, A \cdot \mathbf{e}_j \rangle &= \langle \mathbf{e}_i,\, \boldsymbol{a}^{(j)} \rangle &= a_{i,j} , \end{aligned}$$

sodass aus Gl. (12.19) schon folgt, dass A symmetrisch ist.

Kommentar Addition, Skalarmultiplikation und Multiplikation sind vollkommen analog auch für komplexe Matrizen definiert. ◀

12.3 Matrizen, lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme

Wir haben schon gesehen, dass sich lineare Gleichungssysteme mit Matrizen und augmentierten Matrizen beschreiben lassen. In diesem Abschnitt wollen wir diese Beziehungen weiter studieren und vertiefen.

Matrizen und lineare Abbildungen bestimmen sich gegenseitig

Fassen wir einen n-dimensionalen Vektor als eine $n \times 1$-Matrix auf, so können wir insbesondere eine $m \times n$-Matrix A mit einem n-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{v}$ multiplizieren. Das Ergebnis $A \cdot \boldsymbol{v}$ ist eine $m \times 1$-Matrix, also ein m-dimensionalen Vektor. Damit definiert A eine Abbildung

$$f = f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{v} \longmapsto A \cdot \boldsymbol{v} .$$

Aus den Regeln zur Matrizenmultiplikation folgt für diese Abbildung f_A sofort:

1. Für $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$f_A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f_A(\boldsymbol{v}) + f_A(\boldsymbol{w}) .$$
2. Für $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt
$$f_A(r \cdot \boldsymbol{v}) = r \cdot f_A(\boldsymbol{v}) .$$

Die Abbildung f_A ist also linear (Abschn. 11.1).

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Teil III

definiert die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f_A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ 4v_1 + 3v_2 + 2v_3 \end{pmatrix} .$$ ◄

Es ist aber nicht nur so, dass jede $m \times n$-Matrix A eine lineare Abbildung f_A von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ definiert. Umgekehrt gilt auch, dass jede lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ auf diese Art und Weise von einer $m \times n$-Matrix A kommt, dass also $f = f_A$ für eine $m \times n$-Matrix A ist.

Dazu betrachten wir die Standardbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$ Dann ist $f(\mathbf{e}_j)$ ein Vektor in $\mathbb{R}^m$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir können also

$$f(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

schreiben und bilden daraus die $m \times n$-Matrix

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

in der also die Vektoren $f(\mathbf{e}_j)$ gerade die j-ten Spalten bilden. Dann erhalten wir für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ aufgrund der Linearität von f und der Definition der Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= f(v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n) \\ &= v_1 \cdot f(\mathbf{e}_1) + \cdots + v_n \cdot f(\mathbf{e}_n) \\ &= v_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \cdot a_{1,1} + \cdots + v_n \cdot a_{1,n} \\ \vdots \\ v_1 \cdot a_{m,1} + \cdots + v_n \cdot a_{m,n} \end{pmatrix} \\ &= A \cdot \boldsymbol{v} , \end{aligned}$$

und damit ist gezeigt, dass $f = f_A$.

Definition

Die Matrix A heißt **darstellende Matrix** von f (bzgl. der Standardbasis) und wird auch mit $\mathrm{Ma}(f)$ bezeichnet.

Beispiel

Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 + v_3 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und damit wird sie beschrieben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$ ◄

Zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gehört auf diese Art und Weise also eine eindeutige $m \times n$-Matrix A, und umgekehrt bestimmt auch jede $m \times n$-Matrix A genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Matrizen und lineare Abbildungen entsprechen sich daher eineindeutig. Die Zuordnung

$$\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}, \quad f \longmapsto \mathrm{Ma}(f)$$

ist also eine bijektive Abbildung.

Lineare Abbildungen beschreiben lineare Gleichungssysteme

Wie wir schon gesehen haben, erhalten wir aus jedem allgemeinen linearen Gleichungssystem

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \tag{12.20}$$

eine $m \times n$-Koeffizientenmatrix $A = (a_{i,j})$, einen Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^m$ und einen n-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ von Unbekannten. Es ist nun leicht nachzurechnen, dass die linke Seite des Gleichungssystems (12.20) nichts anderes ist als $A \cdot \boldsymbol{x}$. Das rechtfertigt die Notation

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

für das Gleichungssystem (12.20), die wir schon benutzt haben. Bezeichnet f_A die lineare Abbildung, die zur Matrix A gehört, so ist das Finden der Lösungen von Gleichungssystem (12.20) äquivalent zum Finden der Urbildmenge $f_A^{-1}(\boldsymbol{b})$.

Definition

Für eine $m \times n$-Matrix A nennen wir

$$\mathrm{Kern}(A) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$$

den **Kern** oder **Nullraum** von A und

$$\mathrm{Bild}(A) := \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \mid \text{es gibt } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}\}$$

das **Bild** oder den **Spaltenraum** von A.

Für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definierten wir

- $\mathrm{Kern}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$,
- $\mathrm{Bild}(f) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \mid \text{es gibt } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{b}\}$.

Ist A die zu einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gehörige Matrix, so ist klar, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(f) &= \mathrm{Kern}(A) \\ \mathrm{Bild}(f) &= \mathrm{Bild}(A)\,, \end{aligned}$$

und damit folgt aus den Ergebnissen über lineare Abbildungen in Abschn. 11.1:

Kern und Bild sind Untervektorräume

Für jede $m \times n$-Matrix A gilt:

1. $\mathrm{Kern}(A)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathrm{Bild}(A)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$.

Definition

- $\mathrm{Rang}(A) := \dim(\mathrm{Bild}(A))$ heißt **Rang** der Matrix A.
- $\mathrm{Nul}(A) := \dim(\mathrm{Kern}(A))$ heißt die **Nullität** von A.

Der Rang einer Matrix A ist der Rang des zugehörigen (homogenen) Gleichungssystems $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Ist A eine $m \times n$-Matrix, sind $\boldsymbol{a}_{(1)} = A^T_{1,\bullet}, \ldots, \boldsymbol{a}_{(m)} = A^T_{m,\bullet}$ die Zeilenvektoren von A (als Spalten geschrieben) und ist

$$\mathcal{Z} = \langle\{\boldsymbol{a}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{(m)}\}\rangle$$

der hiervon erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ (der **Zeilenraum** von A), so gilt

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathcal{Z}^\perp\,,$$

wobei $\mathcal{Z}^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{Z}$ bezeichnet (wie in Abschn. 11.2 definiert), denn es ist

$$A \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i,1} \cdot v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{i,m} \cdot v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{a}_{(1)}, \boldsymbol{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{a}_{(m)}, \boldsymbol{v}\rangle \end{pmatrix},$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} A \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} &\iff \langle \boldsymbol{a}_{(i)}, \boldsymbol{v}\rangle = 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\} \\ &\iff \boldsymbol{v} \in \mathcal{Z}^\perp\,. \end{aligned}$$

Gleichungssysteme und Koeffizientenmatrizen

1. Genau dann ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems
$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
wenn $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A)$.
2. Genau dann hat das allgemeine lineare Gleichungssystem
$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
eine Lösung, wenn $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Bild}(A)$.
3. Ist $\boldsymbol{v}$ eine Lösung von
$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,$$
so ist jede weitere Lösung dieses Gleichungssystems von der Form $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ für ein $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Kern}(A)$, und umgekehrt ist auch für jedes $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Kern}(A)$ der Vektor $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ eine Lösung dieses Gleichungssystems.

Diese Aussagen sind zentral für die Arbeit mit linearen Gleichungssystemen und werden daher genauer betrachtet. Die ersten beiden sind nur eine Umformulierung der vorangegangenen Ausführungen.

Ist $\boldsymbol{v}$ eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems und ist $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Kern}(A)$, so gilt

$$A \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = A \cdot \boldsymbol{v} + A \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}\,,$$

und damit ist $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ eine Lösung des Gleichungssystems. Ist $\boldsymbol{v}'$ eine weitere Lösung des Gleichungssystems, so gilt für den Vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$:

$$A \cdot \boldsymbol{w} = A \cdot \boldsymbol{v}' - A \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}\,,$$

und damit ist $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Kern}(A)$ mit $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, wie gewünscht.

Matrizen in Normalform helfen, homogene lineare Gleichungssysteme zu lösen

Ist A die Matrix, die zu einem homogenen Gleichungssystem in Normalform gehört, so kann eine Basis von Kern(A) leicht ermittelt werden. Hat das homogene Gleichungssystem die Gestalt

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,t}x_t & + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ x_2 + \cdots + a_{2,t}x_t & + \cdots + a_{2,n}x_n & = 0 \\ \ddots \quad \vdots & \vdots & \\ x_t & + \quad + a_{t,n}x_n & = 0 \\ & 0 & = 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & = 0, \end{array}$$

so können wir, wie wir gesehen haben, die Variablen $x_{t+1}, \ldots, x_n$ mit beliebigen Werten $r_{t+1}, \ldots, r_n$ belegen. Wir nennen diese Variablen daher auch **freie Variablen**. Zu jeder dieser Parametervorgaben $x_{t+1} = r_{t+1}, \ldots, x_n = r_n$ gibt es genau eine Lösung (also passende $x_1, \ldots, x_t$). Speziell gilt das für die Kombinationen

$$\begin{array}{llllll} 1: & x_{t+1} = 1, & x_{t+2} = 0, & x_{t+3} = 0, & \ldots, & x_n = 0 \\ 2: & x_{t+1} = 0, & x_{t+2} = 1, & x_{t+3} = 0, & \ldots, & x_n = 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ n-t: & x_{t+1} = 0, & x_{t+2} = 0, & x_{t+3} = 0, & \ldots, & x_n = 1\,. \end{array}$$

Bezeichnen wir die zugehörigen Lösungen mit $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-t}$, so rechnen wir leicht nach, dass die Lösung $\boldsymbol{v}$ zu den Parametern $x_{t+1} = r_{t+1}, \ldots, x_n = r_n$ gegeben ist durch

$$\boldsymbol{v} = r_{t+1} \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_{t+2} \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_{n-t}\,.$$

Aufgrund der speziellen Wahl der Kombinationen 1 bis $n-t$ ist klar, dass $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-t}$ linear unabhängig sind. Damit ist gezeigt, dass sie eine Basis von Kern(A) bilden.

Besonders einfach ist die Situation, wenn die Matrix zu einem homogenen linearen Gleichungssystem in reduzierter Normalform gehört. In diesem Fall gilt $a_{i,j} = 0$ für $i < j < t+1$, und daher hat die Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,t+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{t,t+1} & \cdots & a_{t,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen des homogenen Systems lassen sich, wie wir schon gesehen haben, aus der Matrix ablesen:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -a_{1,t+1} \\ -a_{2,t+1} \\ \vdots \\ -a_{t,t+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{v}_{n-t} = \begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ -a_{2,n} \\ \vdots \\ -a_{t,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dimensionsformel

Hat ein homogenes lineares Gleichungssystem in n Unbekannten mit Koeffizientenmatrix A den Rang t, so ist

$$\mathrm{Nul}(A) = n - t\,,$$

und eine Basis des Lösungsraumes kann aus einer Normalform nach dem oben angegebenen Verfahren bestimmt werden.

Die Normalform bestimmt den Rang einer Matrix

Nun wollen wir noch die Vielfältigkeit der Lösungen genauer analysieren.

Bild und Spaltenraum

Ist $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$-Matrix und sind $\boldsymbol{a}^{(1)} = A_{\bullet,1}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(n)} = A_{\bullet,n}$ die Spaltenvektoren von A, so gilt

$$\mathrm{Bild}(A) = \langle\{\boldsymbol{a}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(n)}\}\rangle\,.$$

Nach Definition der Matrizenmultipikation und ihrer Linearität ist nämlich

$$A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot \boldsymbol{a}^{(1)} + \cdots + v_n \cdot \boldsymbol{a}^{(n)}\,,$$

und damit gilt $\mathrm{Bild}(A) \subset \langle\{\boldsymbol{a}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(n)}\}\rangle$. Umgekehrt ist aber auch

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{a}^{(1)} + \cdots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{a}^{(n)} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

und hieraus folgt die andere Inklusion $\mathrm{Bild}(A) \supset \langle\{\boldsymbol{a}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}^{(n)}\}\rangle$, also die Gleichheit der beiden Mengen.

Teil III

Aus A können wir also unmittelbar ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(A)$ ablesen. Wie lässt sich aber die Dimension von $\mathrm{Bild}(A)$, also der Rang von A, schnell bestimmen?

Zunächst halten wir hierzu fest, dass

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}\,(A \mid \mathbf{0})$$

gilt, wobei $(A \mid \mathbf{0})$ die augmentierte Matrix zum homogenen Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

ist, denn durch Hinzunahme des Nullvektors ändert sich ein Untervektorraum (und damit auch seine Dimension) nicht. Augmentierte Matrizen $B = (A \mid \boldsymbol{b})$) haben wir durch vier elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf Normalform gebracht. Der entscheidende Punkt für unsere Überlegungen ist

Rang und elementare Umformungen

Führen wir an einer augmentierten Matrix $(A \mid \mathbf{0})$ eine der Zeilen- und Spaltenumformungen 1.–4. durch, so erhalten wir eine augmentierte Matrix $(A' \mid \mathbf{0})$ vom selben Rang.

Zu zeigen ist dazu, dass sich die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von $(A \mid \mathbf{0})$ durch keine der Operationen 1.–4. ändert. Ein Spezialfall dieser Aussage wird in Aufgabe 12.18 behandelt.

Kommentar Anstelle der Zeilenoperationen

1. Subtrahiere das Vielfache einer Zeile von $(A \mid \boldsymbol{b})$) von einer anderen Zeile.
3. Multipliziere eine Zeile von $(A \mid \boldsymbol{b})$ mit einer Zahl $r \neq 0$.

können wir an der augmentierten Matrix genauso die folgenden Spaltenoperationen durchführen:

1′. Subtrahiere das Vielfache einer Spalte von $(A\,|\boldsymbol{b})$) die nicht die letzte ist, von einer anderen Spalte, die nicht die letzte ist.
3′. Multipliziere eine Spalte von $(A\,|\boldsymbol{b})$, die nicht die letzte ist, mit einer Zahl $r \neq 0$.

Auch diese Operationen verändern den Rang der augmentierten Matrix nicht. ◀

Die Operationen 1.–4. lassen die letzte Spalte der augmentierten Matrix $(A \mid \mathbf{0})$ unberührt; sie bleibt immer die Nullspalte. Daher verzichten wir in diesem Fall darauf, diese Spalte mitzuführen und führen die Operationen an der Matrix A durch. Wir sprechen dann auch von einer Normalform von A. Eine solche hat die Gestalt

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{1,2} & \dots & a'_{1,t} & a'_{1,t+1} & \dots & a'_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2,t} & a'_{2,t+1} & \dots & a'_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{t,t+1} & \dots & a'_{t,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser lesen wir sofort ab, dass die ersten t Spalten eine Basis des Spaltenraumes von A' bilden. Also ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') = t$. Der Rang einer Matrix ist daher der Rang des zugehörigen linearen Gleichungssystems $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, kann also mithilfe des gaußschen Eliminationsalgorithmus ermittelt werden. Damit erhalten wir insbesondere folgende Aussage.

Lösbarkeit von Gleichungssystemen

Genau dann hat das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

eine Lösung, wenn

$$\mathrm{Rang}\,(A) = \mathrm{Rang}\,(A\,|\,\boldsymbol{b})\ .$$

Wie wir schon gesehen haben, ändert sich der Rang von A nicht, wenn wir die erlaubten Zeilen- oder Spaltenoperationen an A durchführen. Aber Spaltenoperationen an A entsprechen Zeilenoperationen an A^T und umgekehrt. Ist also A' eine Matrix, die aus A durch zulässige Zeilen- und Spaltenoperationen hervorgeht (sodass $\mathrm{Rang}(A') = \mathrm{Rang}(A)$), so ist $(A')^\top$ die Matrix, die aus $A^\top$ durch die entsprechenden Spalten- und Zeilenoperationen (also mit vertrauschten Rollen) hervorgeht. Durch die Kombination von Spalten und Zeilenoperationen können wir aber A auf die Gestalt

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und entsprechend $A^\top$ auf die Gestalt $(A'')^T$ bringen. Diese beiden Matrizen haben offensichtlich den gleichen Rang. Damit gilt

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^T)\,. \tag{12.21}$$

Der Rangsatz verbindet Bild und Kern

Ein zentrales Ergebnis der Matrizentheorie ist folgender Satz.

Rangsatz

Ist A eine $m \times n$-Matrix, so gilt

$$\mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Nul}(A) = n\,.$$

Ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, so gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = n\,.$$

Wir können in der Situation des Rangsatzes annehmen, dass A in Normalform vorliegt, da sich dadurch der Rang der Matrix nicht ändert und auch die Lösungsmenge von $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ von den Zeilen- und Spaltenumformungen 1.–4. unberührt bleibt. Hat aber die Normalform von A die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,t} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2,t} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{t,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

so hat A den Rang t, und wir haben auch schon gesehen, dass $\operatorname{Kern}(A)$ eine Basis, bestehend aus $n - t$ Vektoren, hat, sodass $\operatorname{Nul}(A) = n - t$.

Der Rangsatz hat viele Anwendungen. Als einfaches Beispiel hierfür betrachten wir eine notwendige Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit von Gleichungssystemen.

Eindeutigkeit der Lösung

Hat ein lineares Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

mit einer $m \times n$-Matrix A eine eindeutige Lösung für jede Wahl von $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, so muss schon $n = m$ gelten.

Ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bijektiv, so muss also notwendig $n = m$ gelten.

Damit es überhaupt eine Lösung von

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gibt, muss auf jeden Fall jeder Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ im Spaltenraum $\operatorname{Bild}(A)$ von A sein, und das bedeutet, dass $\operatorname{Rang}(A) = m$. Andererseits wollen wir, dass jedes Gleichungssystem nur eine Lösung hat, speziell also auch $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Das bedeutet aber, dass $\operatorname{Nul}(A) = 0$, und aus dem Rangsatz folgt jetzt sofort, dass $n = m$.

Beispiel

Ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine bijektive lineare Abbildung, so ist $m = n$. Umgekehrt folgt aber aus $m = n$ noch nicht, dass die Abbildung f bijektiv ist. So ist die Nullabbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{0}$$

mit Sicherheit nicht bijektiv. Auch die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ 2v_1 - 2v_2 \end{pmatrix}$$

ist nicht bijektiv. Das ist in diesem Fall nicht so offensichtlich. Wir sehen jedoch, dass

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt, sodass f nicht injektiv sein kann. ◀

Wir können die Ergebnisse unserer Überlegungen wie folgt zusammenfassen:

Lösungsmenge eines Gleichungssystems

Ist A eine $m \times n$-Matrix und ist

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A, so gilt:

1. Ist $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Bild}(A)$, so hat das Gleichungssystem (mindestens) eine Lösung; ist $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Bild}(A)$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.
2. Ist $\operatorname{Nul}(A) = 0$, so hat das Gleichungssystem höchstens eine Lösung.
3. Ist $\operatorname{Nul}(A) > 0$, so hat das Gleichungssystem entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

Hat das lineare Gleichungssystem (mindestens) eine Lösung, so können wir die Lösungsmenge wie folgt bestimmen:

1. Wir bringen die augmentierte Matrix $(A \,|\, \boldsymbol{b})$ auf Normalform.
2. Wir bestimmen aus der Normalform eine spezielle Lösung $\boldsymbol{x}_p$.
3. Wir bestimmen die Lösungsmenge L als

$$L = \left\{ \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h \,|\, \boldsymbol{x}_h \in \operatorname{Kern}(A) \right\}.$$

Kommentar Betrachten wir eine komplexe $m \times n$-Matrix A, so definiert diese keine Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sondern eine Abbildung $f_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Wie wir in Mathematischer Hintergrund 11.2 schon gesehen haben, können wir $\mathbb{C}^n$ als komplexen Vektorraum der Dimension n auffassen. Mit dieser Betrachtung gelten die Aussagen dieses Abschnitts analog auch für komplexe Matrizen. ◀

Wir wollen die Erkenntnisse aus diesem Abschnitt zusammenfassen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$

bestimmen. Die Koeffizientenmatrix dieses Systems ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

und die augementierte Matrix hat die Gestalt

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Durch Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten und des Vierfachen der ersten Zeile von der dritten erhalten wir

$$B_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Addition der zweiten Zeile zur dritten führt zu

$$B_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

und das ist auch bereits eine Normalform der augmentierten Matrix. Das zur augmentierten Matrix B_2 gehörige lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

mit den freien Variablen x_3 und x_4. Eine spezielle Lösung erhalten wir dadurch, dass wir diese freien Variablen gleich 0 setzen, $x_3 = x_4 = 0$. Damit bleibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $x_2 = 1$, $x_1 = 1$ (und natürlich $x_3 = 0$, $x_4 = 0$). Eine spezielle Lösung ist also $\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zur Bestimmung des Nullraumes der Matrix bringen wir diese selbst auf Normalform. Dazu können wir die gleichen Operationen durchführen wie bei der augmentierten Matrix: Durch Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten und des Vierfachen der ersten Zeile von der dritten erhalten wir

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Addition der zweiten Zeile zur dritten führt zu

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat damit Rang 2 und Nullität 2.

Das zu A_2 gehörige homogene Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

und zur Bestimmung einer Basis des Nullraumes wenden wir unser Verfahren an:

1. Setze $x_3 = 1$ und $x_4 = 0$ und erhalte das Gleichungssystem

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 1 &= 0 \\ x_2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

   also

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

   mit der eindeutigen Lösung $x_2 = -2$ und $x_1 = 1$. Der erste Basisvektor des Nullraumes ist somit $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Setze $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$ und erhalte das Gleichungssystem

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 1 &= 0 \\ x_2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

   also

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

   mit der eindeutigen Lösung $x_2 = -3$ und $x_1 = 2$. Der zweite Basisvektor des Nullraumes ist somit $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems hat daher die Gestalt

$$\begin{aligned} L &= \{\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h \mid \boldsymbol{x}_h \in \operatorname{Kern}(A)\} \\ &= \{\boldsymbol{x}_p + r \cdot \boldsymbol{v}_1 + s \cdot \boldsymbol{v}_2 \mid r, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

12.1 Mathematischer Hintergrund: Matrizen, lineare Abbildungen und Basen

Wir haben in diesem Abschnitt festgestellt, dass jede $m \times n$-Matrix eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert und dass umgekehrt jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$-Matrix A_f beschrieben werden kann. Dabei haben wir immer mit den Standardbasen des $\mathbb{R}^n$ bzw. des $\mathbb{R}^m$ gearbeitet. Wir haben jedoch schon gesehen, dass es viele verschiedene Basen eines Vektorraumes gibt.

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit}\, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Diese wird beschrieben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardbasen). Wir können im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ aber auch andere Basen betrachten, etwa

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann bilden $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$. Damit kann jeder Vektor $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^3$ als eindeutige Linearkombination

$$\boldsymbol{x} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + r_3 \cdot \boldsymbol{v}_3$$

geschrieben werden, d. h., $\boldsymbol{x}$ wird bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ durch den Vektor $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ dargestellt. Entsprechend hat jeder Vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ eine Darstellung als Linearkombination von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$. Speziell gilt dies also für $f(\boldsymbol{x})$,

$$f(\boldsymbol{x}) = s_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + s_2 \cdot \boldsymbol{u}_2,$$

und wir wollen nun ermitteln, wie sich s_1 und s_2 aus r_1, r_2 und r_3 berechnen.

Dazu berechnen wir zunächst, wie $\boldsymbol{x}$ in den üblichen Koordinaten, also bzgl. der Standardbasis, beschrieben wird:

$$\boldsymbol{x} = r_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r_1 - r_2 + r_3 \\ r_1 + 2r_2 - r_3 \\ r_1 - r_2 + r_3 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$f(\boldsymbol{x}) = A \cdot \begin{pmatrix} 2r_1 - r_2 + r_3 \\ r_1 + 2r_2 - r_3 \\ r_1 - r_2 + r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4r_1 + r_3 \\ 9r_1 + 2r_3 \end{pmatrix}$$

(wieder in den üblichen Koordinaten). Diesen Ergebnisvektor können wir nun mit $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$ ausdrücken und erhalten

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 4r_1 + r_3 \\ 9r_1 + 2r_3 \end{pmatrix} = -r_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + (5r_1 + r_3) \cdot \boldsymbol{u}_2.$$

Bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ wird also $f(\boldsymbol{x})$ dargestellt durch den Vektor $\begin{pmatrix} -r_1 \\ 5r_1 + r_3 \end{pmatrix}$ und hierfür gilt

$$\begin{pmatrix} -r_1 \\ 5r_1 + r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet sich der Vektor $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, der $f(\boldsymbol{x})$ bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ darstellt, aus dem Vektor $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$, der $\boldsymbol{x}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ darstellt, durch Multiplikation mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dieser Ansatz funktioniert für beliebige lineare Abbildungen und bzgl. beliebiger Basen: Ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$, so gibt es genau eine $m \times n$-Matrix A mit der folgenden Eigenschaft: Ist $\boldsymbol{x}$ ein beliebiger Vektor in $\mathbb{R}^n$ und schreiben wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_n \\ f(\boldsymbol{x}) &= s_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + s_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 + \cdots + s_m \cdot \boldsymbol{u}_m, \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix A heißt **darstellende Matrix von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$**, und wir schreiben auch $\mathrm{Ma}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}(f)$ hierfür.

Wie die Matrizen zu unterschiedlichen Basen auseinander hervorgehen und ineinander umgerechnet werden können, werden wir in Abschn. 13.3 näher untersuchen.

Teil III

12.2 Mathematischer Hintergrund: Bilineare Abbildungen und Matrizen

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, dass wir lineare Abbildungen mit Matrizen beschreiben können. In Mathematischer Hintergrund 11.3 haben wir bilineare Abbildungen betrachtet, also Paarungen

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

die linear in der ersten und in der zweiten Komponente sind. Nun wollen wir untersuchen, wie diese Paarungen mit Matrizen zusammenhängen. Dazu betrachten wir die Standardbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$ und setzen $a_{i,j} = \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ und $A = (a_{i,j})$. Sind nun

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

zwei beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^n$, so erhalten wir mit der Standardbasis

$$\boldsymbol{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n$$
$$\boldsymbol{w} = w_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + w_n \cdot \mathbf{e}_n$$

und daher (aufgrund der Bilinearität von β)

$$\begin{aligned} \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \beta(v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n, \boldsymbol{w}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \beta(\mathbf{e}_i, \boldsymbol{w}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \beta(\mathbf{e}_i, w_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + w_n \cdot \mathbf{e}_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot w_j \cdot \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot a_{i,j} \cdot w_j \\ &= \boldsymbol{v}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{w}\,. \end{aligned}$$

Damit lässt sich also β durch die Matrix $A = (\beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))$ beschreiben, und zwar als

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{w}\,,$$

und umgekehrt definiert auch jede $n \times n$-Matrix A über die Formel

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{w}$$

eine bilineare Abbildung.

Ist die Matrix A symmetrisch, so gilt

$$\begin{aligned} \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{w}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{w}^\top \cdot A^\top \cdot \boldsymbol{v} \\ &= \left(\boldsymbol{v}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{w}\right)^\top \\ &= \boldsymbol{v}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{w} \\ &= \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\,, \end{aligned}$$

also ist in diesem Fall β symmetrisch. Ist umgekehrt β symmetrisch, so gilt

$$a_{i,j} = \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \beta(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = a_{j,i}\,,$$

und daher ist in diesem Fall auch die Matrix, die zur Bilinearform β gehört, symmetrisch.

Die Paarung ist genau dann nicht ausgeartet, wenn die Matrix A den Rang n hat. Hat nämlich A den Rang $t < n$, so gibt es einen Vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $A \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, und daher gilt in diesem Fall für jeden anderen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^\top \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

und damit ist β in diesem Fall ausgeartet. Hat dagegen A den Rang n, so ist für $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ auch $A \cdot \boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$, und daher gilt für $\boldsymbol{v} = A \cdot \boldsymbol{w}$

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (A \cdot \boldsymbol{w})^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{w} = |A \cdot \boldsymbol{w}| \neq \mathbf{0}\,,$$

und β ist folglich nicht ausgeartet.

Wie wir gesehen haben, zeichnen sich bestimmte nicht ausgeartete symmetrische Bilinearformen (wie etwa das Skalarprodukt) durch ihre Definitheit aus. Diese Eigenschaften und Begriffe lassen sich nun sofort mit Matrizen beschreiben. Eine symmetrische Matrix heißt daher **positiv definit** bzw. **positiv semidefinit**, wenn die zugehörige symmetrische Bilinearform positiv definit bzw. positiv semidefinit ist, also wenn

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{x} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{x}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{x} \geq 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}\,,$$

und entsprechend nennen wir eine symmetrische Matrix **negativ definit** bzw. **negativ semidefinit**, wenn

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{x} < 0 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{x}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{x} \leq 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}\,,$$

und **indefinit**, wenn es $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{x} > 0, \qquad \boldsymbol{y}^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{y} < 0\,.$$

Unmittelbar klar ist, dass die Matrix A genau dann negativ (semi-)definit ist, wenn $-A$ positiv (semi-)definit ist.

Das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ wird durch die $n \times n$-Einheitsmatrix E_n beschrieben.

Genauere Untersuchungen der Definitheit von Matrizen werden wir in Kap. 14 durchführen.

Anwendung: Berechnungen mit Matrizen in MATLAB

Matrizen werden in MATLAB mit eckigen Klammern `[ ]` angelegt. Dabei werden die Einträge in einer Zeile durch ein Leerzeichen oder durch ein Komma „ , “ voneinander getrennt, die verschiedenen Zeilen durch eine Strichpunkt „ ; “. Die transponierte Matrix $A^\top$ wird mit dem Befehl `transpose` erzeugt. Den i-ten Zeilenvektor einer Matrix A bekommen wir mit `A(i,:)` und entsprechend den j-ten Spaltenvektor mit `A(:,j)`. Der Befehl `size(A)` liefert das Paar $[m, n]$, bestehend aus der Anzahl m der Zeilen von A und der Anzahl n der Spalten von A zurück:

```
A = [1,2,3;5,4,3]
A =
     1     2     3
     5     4     3
[m,n] = size(A)
m =
     2
n =
     3
B = transpose(A)
B =
     1     5
     2     4
     3     3
v=A(1,:)
v =
     1     2     3
```

Eine $n \times m$-Nullmatrix wird mit dem Befehl `zeros(n,m)` angelegt, eine $n \times n$-Einheitsmatrix mit `eye(n)` und eine Diagonalmatrix (mit den Diagonaleinträgen a, b und c) mit der Anweisung `diag([a,b,c ])`:

```
N=zeros(2,3), E=eye(3), D=diag([2,3,4])

N =
     0     0     0
     0     0     0

E =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

D =
     2     0     0
     0     3     0
     0     0     4
```

Matrizenaddition wird in MATLAB durch + realisiert, Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar durch `*`, genauso wie die Multiplikation von zwei Matrizen:

```
A = [1,2;3,4]; B = [1,4;2,3]; r = 4;
C = r*A
C =
     4     8
    12    16

D = A+B
D =
     2     6
     5     7

E = A*B
E =
     5    10
    11    24
```

Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix kann in MATLAB mit dem Befehl `rref` (für *reduced row echelon form*) ermittelt werden.

```
A=[40,50,70,60;30,20,10,20;30,30,20,20];
b=[5200;2100;2700];
B=rref(A)
B =
     1     0     0     1
     0     1     0    -1
     0     0     1     1
C=rref([A,b])
C =
     1     0     0     1    40
     0     1     0    -1    30
     0     0     1     1    30
```

Die augmentierte Matrix

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 30 & 50 & 70 & 60 & 5200 \\ 30 & 20 & 10 & 20 & 2100 \\ 30 & 30 & 20 & 20 & 2700 \end{array}\right),$$

die zu dem Gleichungssystem (12.5) gehört, hat also die reduzierte Zeilenstufenform

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

woraus sich $x_1 = 40,\ \ x_2 = 30,\ x_3 = 30,\ x_4 = 0$ als spezielle Lösung ablesen lässt. Die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 70 & 60 \\ 30 & 20 & 10 & 20 \\ 30 & 30 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

dieses Systems hat die reduzierte Zeilenstufenform

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus wir $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ als Basislösung des homogenen Gleichungssystems erhalten. Damit bekommen wir insgesamt als allgemeine Lösung

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (r \in \mathbb{R}).$$

Zur Bestimmung dieser Lösung können wir allerdings auch noch anders vorgehen. Eine spezielle Lösung $\boldsymbol{x}_p$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ liefert `xp = A\b`, und eine Basis des Nullraumes der Matrix A erhalten wir durch den Befehl `null(A)`:

```
A=[40,50,70,60;30,20,10,20;30,30,20,20];
b=[5200;2100;2700];
xp=A\b
xp =
   70.0000
         0
   60.0000
  -30.0000
V=null(A)
V =
   -0.5000
    0.5000
   -0.5000
    0.5000
```

Dadurch erhalten wir als spezielle Lösung $\boldsymbol{x}_p$ des inhomogenen Gleichungssystems und als Basis $\boldsymbol{v}$ des Nullraumes

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 70 \\ 0 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

woraus wir über $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + r \cdot \boldsymbol{v}$ wieder die allgemeine Lösung bekommen.

Falls $\mathrm{Nul}(A) > 1$, so liefert `null(A)` eine Matrix zurück, deren Spalten eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ bilden. Beachten Sie dabei, dass MATLAB aus Gründen der numerischen Stabilität die Lösungen des homogenen Gleichungssystems auf die Länge 1 normiert (und bei mehreren Basisvektoren diese auch paarweise orthogonal bestimmt).

Aufgaben

12.1 Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

12.2 Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

12.3 Überprüfen Sie, ob das lineare Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Lösungen hat, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

12.4 Überprüfen Sie, ob das lineare Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösungen hat, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

12.5 Bestimmen Sie alle Zahlen $c \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + c \cdot x_3 + c \cdot x_4 &= 1 \end{aligned}$$

eine Lösung hat, und bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungen in Abhängigkeit von c.

12.6 Bestimmen Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + (a+1) \cdot x_3 + 3a \cdot x_4 &= 1 \\ -x_1 - 4x_2 + (a-5) \cdot x_3 + (4a+8) \cdot x_4 &= 4 \end{aligned}$$

eine Lösung hat, und bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungen in Abhängigkeit von a.

Teil III

12.7 Bestimmen Sie die transponierten Matrizen von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \pi & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sind A oder B symmetrisch?

12.8 Bestimmen Sie die transponierten Matrizen von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.9 Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix und die augmentierte Matrix dieses Gleichungssystems, überprüfen Sie, ob es Lösungen hat, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

12.10 Wir betrachten das lineare Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 4\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix und die augmentierte Matrix dieses Gleichungssystems, überprüfen Sie, ob es Lösungen hat, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

12.11 Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 9x_4 + 11x_5 &= -9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 &= -7 \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 - 12x_5 &= 5 \\ -2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 - 13x_5 &= 8\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix und die augmentierte Matrix dieses Gleichungssystems, bringen Sie die augmentierte Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform, überprüfen Sie, ob das Gleichungssystem Lösungen hat, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

12.12 Wir betrachten das lineare Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\cdot x_1 + (1+\mathrm{i})\cdot x_2 + (1-\mathrm{i})\cdot x_3 &= 2 \\ 2\cdot x_1 \qquad\qquad + \quad 3\mathrm{i}\cdot x_3 &= 1 + 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\cdot x_2 + \qquad x_3 &= 3\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix und die augmentierte Matrix dieses Gleichungssystems, überprüfen Sie, ob es Lösungen hat, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

12.13 Bestimmen Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{C}$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + \mathrm{i}\cdot x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= \mathrm{i} \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \mathrm{i}\cdot x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + a\cdot x_3 + a\cdot x_4 &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

eine Lösung hat, und bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter a.

12.14 Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $A^\top, B^\top, A\cdot B$ und $B^\top \cdot A$.

12.15 Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $A^\top$, $B^\top$, $A + B$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

12.16 Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 4 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 1 \\ 5-\mathrm{i} & \mathrm{i}-4 & -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $A \cdot B$ und $B^\top \cdot A$.

12.17 Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (falls der Ausdruck existiert):

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot A$
c) $B \cdot C$
d) $B^\top \cdot A$
e) $B^\top + C$

12.18 Zeigen Sie: Entsteht die Matrix B aus der Matrix A durch Addition eines Vielfachen der ersten Zeile von A zur zweiten

Zeile von A, so gilt

$$\mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang}(A)\,.$$

Das ist ein Spezialfall der Aussage, dass sich der Rang einer Matrix bei Zeilen- und Spaltenoperationen nicht ändert.

12.19 Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A)$, $\mathrm{Rang}(B)$ und $\mathrm{Nul}(A)$, $\mathrm{Nul}(B)$.

12.20 Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, für die das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Lösungen hat.

12.21 Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

12.22 Zeigen Sie: Ist A eine $n \times n$-Matrix mit $\mathrm{Nul}(A) = 0$, so hat das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung.

12.23 Wir betrachten eine 3×3-Matrix A mit $\mathrm{Rang}(A) = 2$, und wir nehmen an, dass die ersten beiden Zeilen $\boldsymbol{a}_{(1)}$ und $\boldsymbol{a}_{(2)}$ von A linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass der Vektor

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_{(1)} \times \boldsymbol{a}_{(2)}$$

(das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}_{(1)}$ und $\boldsymbol{a}_{(2)}$) eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ ist.

Teil III

Determinanten und invertierbare Matrizen

13

Was haben Matrizen mit Flächeninhalten und Volumina zu tun?

Wann haben Gleichungssysteme eindeutige Lösungen?

Was sind inverse Matrizen, und wie berechnen sie sich?

Was sind orthogonale Matrizen?

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_13